

ÖNERMELER CEBİRİ

Tanım: Doğru ya da yanlış olan ifadelere önerme denir. Bir önerme tek bir yargı bildiriyorsa bu önermeye basit önerme denir.

Bu tanıma göre emir, soru ve ünlem cümleleri önerme değildir.

Önermeler p, q, r, s, t gibi harflerle gösterilir.

Örnek: p : $2+3=9$.
 q : Asal ve çift olan bir tam sayı vardır.
 r : π sayısı $22/7$ sayısına eşittir.

Her biri bir önermedir.

- a) Dersten sonra şehri gezelim.
- b) Kaç yaşındasınız?
- c) $x+3=7$



İfadeler önerme değildir.
 Scanned with CamScanner

Tanım: Bir önermenin doğru ya da yanlış olmasına o önermenin doğruluk değeri denir.

Bir doğru önermenin doğruluk değeri: 1 (veya Δ) ile, bir yanlış önermenin doğruluk değeri: 0 (veya ∇) ile gösterilir.

Tanım: İki ya da daha çok önerme "ve", "veya", "ise", "ancak ve ancak" bağlacılarından en az biri ile birbirine bağlanarak yeni önermeler tanımlanabilir. Bu önermelere bilesik önermeler denir.

Bir bilesik önermenin doğruluk değeri bağlaçlara bağlı olarak bu önermeyi oluşturan basit önermelerin doğruluk değerleri cinsinden belirtenebilir. Bir bilesik önermenin doğruluk değeri kendisini oluşturan basit önermelerin değerleri için tüm seçenekler göz önünde bulundurarak bir çizelge yardımıyla verilir. Verilen çizelgeye bilesik önermenin

doğruluk airtelgesi denir.

Tanım: Doğruluk değeri aynı olan iki önermeye denk önerme denir. " \equiv " ile gösterilir.

Tanım: Bir önermenin doğruluk değeri doğru iken yanlış, yanlış iken doğru yapılarak elde edilen yeni önermeye o önermenin değili (olumsuzu) denir.

Bir p önermesinin değili p' veya $\neg p$ ile gösterilir.

p	p'
1	0
0	1

Örnek: $5 < 6$ önermesinin olumsuzu $5 \geq 6$ önermesidir.

NOT: Doğruluk değeri bakımından bir önerme için iki durum, iki önerme için dört durum vardır.

P
1
0

P	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Birbirinden farklı n tane önerme verildiğinde, doğruluk değerleri bakımından bu önermeler arasında birbirine göre 2^n farklı durum vardır.

NOT: Bilesik önermeler oluşturmak için kullanılan bağlaçlara sembolik mantık ya da mantık bağlaçları diyeceğiz.

Tanım: "Ve" (\wedge) Bağlacı

p ve q önermeleri için p ile q nun ikisi birden doğru iken doğru diğer durumlarda yanlış olan önermeye denir. $p \wedge q$ ile gösterilir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Örnek: p : 3 bir asal sayıdır.

q : 17 bir tek sayıdır.

$p \wedge q$: 3 bir doğal sayı ve 17 bir tek sayıdır.

$$p \wedge q \equiv 1$$

$$r: 2 \neq 4$$

s : 3^2 bir çift sayıdır.

$$r \equiv 1, s \equiv 0 \quad r \wedge s \equiv 0$$

Tanımı: "veya" (\vee) Bağlacı

p ve q önermeleri için en az biri doğru iken doğru diğer bütün durumlarda yanlış olan önermeye denir.

$p \vee q$ ile gösterilir.



p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Tanım: "ya da" (\vee) Bağlacı

p ve q önermelerinden yalnızca biri doğru iken doğru diğer durumlarda yanlış olan önermeye denir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Tanım: "ise" (\Rightarrow) Bağlacı

" p ise q " biçimindeki önermeye koşullu önerme denir. $p \Rightarrow q$ ile gösterilir.

$p \Rightarrow q$ önermesi p doğru q yanlış durumunda yanlış

diğer durumlarda doğrudur.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$p \Rightarrow q$ önermesinde; p önermesine q için yeter koşul,
q önermesine p için gerek koşul denir.

$p \Rightarrow q$ önermesi;

- a) p ise q dur.
- b) p, q'yu gerektirir.
- c) p, q için yeter koşuldur.
- d) q, p için gerek koşuldur.

biri ile ifade edilir.

$p \Rightarrow q$ önermesinde; p önermesine hipotez (varsayım),
q önermesine hüküm (yargı) denir.

Tanım: Hipotezi doğru olup, doğru oldukları ispatlanmış
koşullu önermelere teorem denir.

Tanım: "ancak ve ancak" (\Leftrightarrow) Bağlaç

p ve q önermelerinin her ikisi birden doğru iken ya da her ikisi birden yanlış iken doğru, diğer durumlarda yanlış olan önermeye denir. $p \Leftrightarrow q$ ile gösterilir. p gerek ve yeter şart diye de ifade edilir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

NOT: Bir doğruluk aizelgesinin sütununa bileşik önermenin doğruluk değeri ya da aizelgenin esas sütunu denir.

$$* \quad p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$$

$$* \quad p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

İfadelerin denklğini doğruluk çizelgesi ile gösterelim.

P	q	P'	$P \Rightarrow q$	$P' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

≡ ≡

P	q	$P \Rightarrow q$	$q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow q$	$(P \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

≡ ≡

Tanım: $p \Rightarrow q$ önermesi verilsin.

$p' \Rightarrow q'$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin tersi,
 $q \Rightarrow p$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin karsıtı,
 $q' \Rightarrow p'$ önermesine $p \Rightarrow q$ önermesinin karsıt tersi

denir.

$$* \quad p \Rightarrow q \equiv q' \Rightarrow p'$$

p	q	p'	q'	$p \Rightarrow q$	$q' \Rightarrow p'$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

\equiv

Tanımı: Bir bileşik önerme kendini oluşturan önermelerin doğruluk değerlerine bakılmaksızın daima doğru ise o önermeye totoloji, daima yanlış ise o önermeye çelişki denir.

Örnek: $(p \leftrightarrow p')' \equiv 1$ $p \wedge p' \equiv 0$
tutoloji çelişki

Örnek: $(p \wedge q)' \Leftrightarrow (p' \vee q') \equiv ?$

NOT: $p \Leftrightarrow q \equiv p' \Leftrightarrow q' \equiv q' \Leftrightarrow p'$

Teorem: p, q ve r \forall a önerme olsun.

i) $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$ (Tek kurvet özelliği)

ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$ (Değişme özelliği)

iii) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (Birleşme özelliği)

iv) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Dağılma özelliği)

v) $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$
 $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ (De Morgan kuralları)



$$\begin{aligned} \text{vi)} \quad 1 \vee p &\equiv 1 \\ p \wedge 1 &\equiv p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \vee p' &\equiv 1 \\ p \wedge p' &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$(p')' \equiv p$$

İspat: Doğruluk aizelgesi kullanılarak gösterilebilir. \wedge nin değişme özelliğini gösterelim.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

$$\therefore p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem: p, q ve r üç önerme olsun. $p \Rightarrow q$ ve $q \Rightarrow r$ önermeleri doğru ise $p \Rightarrow r$ önermesi de doğrudur.



İspat:

Örnek: $p \vee q \Leftrightarrow p' \wedge q'$ önermesinin doğruluk değeri nedir?

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$p' \wedge q'$	$p \vee q \Leftrightarrow p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	0

≡ Gerçek

Örneği: $p \Rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$
denklikini gösteriniz.

$$\begin{aligned} p \Rightarrow (q \wedge r) &\equiv p' \vee (q \wedge r) \\ &\equiv (p' \vee q) \wedge (p' \vee r) \\ &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r) \end{aligned}$$

Örnek: $[p \Leftrightarrow (q \vee r)] \wedge (p \wedge r')$ önermesi doğru ise p, q, r önermelerinin doğruluk değerlerini bulunuz.

