KÜMELER CEBİRİ

Tanım: Küme bir takım nesnelerin bir topluluğudur. Kümeyi oluşturan nesnelerin herbirine de o kümenin bir elemanı denir.

Kümeler büyük harflerle gösterilir.

$x \in A$ (x, A kümesine ait)

$x \notin A$ (x, A kümesine ait değil)

Hiç bir elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve $\emptyset$ veya $\{\}$ ile gösterilir.

Örnek: $X = \{ x \in \mathbb{N} : |x-3| < 2 \}$

$|x-3| < 2 \implies 1 < x < 5$

$X = \{2, 3, 4\}$

Tanım: A ve B herhangi iki küme olsun. A kümesinin her bir elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B kümesinin bir alt kümesidir denir. $A \subseteq B$ ile gösterilir.

$A \subseteq B$ (A alt küme B)
$B \supseteq A$ (B kapsar A)

* $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$

Tanım: **(Eşit Küme)**

A ve B kümeleri verilsin.

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$
$$\Leftrightarrow [\forall x \in A \Rightarrow x \in B] \wedge [\forall x \in B \Rightarrow x \in A]$$

Tanım: A kümesi B kümesinin bir alt kümesi ve $A \neq B$ ise A kümesine B kümesinin öz alt kümesi denir.

Tanım: A ve B kümelerinin eleman sayıları eşit ise A ile B kümesine __denktirler__ denir ve $A \equiv B$ ile gösterilir.

NOT: 1) Kümenin elemanlarının yerleri değişebilir.

2) Bir eleman bir kez kullanılır.

3) $S(A)$, A kümesinin eleman sayısını gösterir.

$S(A) = n \Rightarrow$ A sonlu küme

$S(A) = \infty \Rightarrow$ A sonsuz küme

4) $S(A) = n$ ise A nın alt kümelerinin sayısı 2^n dir.

A nın alt kümelerinin kümesine A nın kuvvet kümesi denir ve $P(A)$ veya 2^A ile gösterilir.

$S(A) = n \Rightarrow S(P(A)) = 2^n$

5) n elemanlı bir kümenin r li kombinasyonlarının sayısı

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,.\,r!}$$

$$r+s=n \Rightarrow \binom{n}{r}=\binom{n}{s}$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$$

örnek: $A=\{1,2\}$ kümesinin kuvvet kümesi

$$P(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

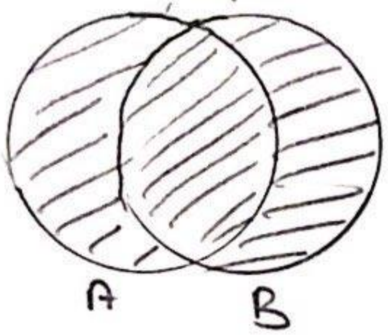
Tanım: Belirli bir tartışmada ya da incelemede sözü geçen tüm kümeleri alt küme olarak alan belirli bir kümeye evrensel küme denir. E harfi ile gösterilir.

Tanım: E evrensel küme, $A \subseteq E$ olsun. E nin A da olmayan elemanlarının kümesine A nın tümleyeni denir. A kümesinin tümleyeni A' veya A^t veya A^c ile gösterilir.

$$A'=\{x\in E : x\in E, x\notin A\}$$

Tanım: A ve B iki küme olsun. A kümesinde veya B kümesinde bulunan tüm elemanların kümesine A ile B kümelerinin <u>birlesimi</u> denir. $A \cup B$ ile gösterilir.

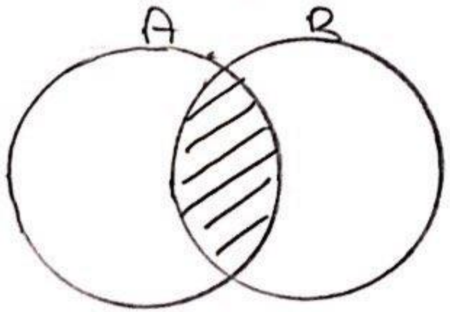
$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ veya } x \in B \}$$



$A \cup B$

Tanımı: A ve B iki küme olsun. Hem A kümesinde hem de B kümesinde olan elemanların kümesine A ile B nin <u>kesisimi</u> veya <u>arakesiti</u> denir. $A \cap B$ ile gösterilir.

$$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ ve } x \in B \}$$

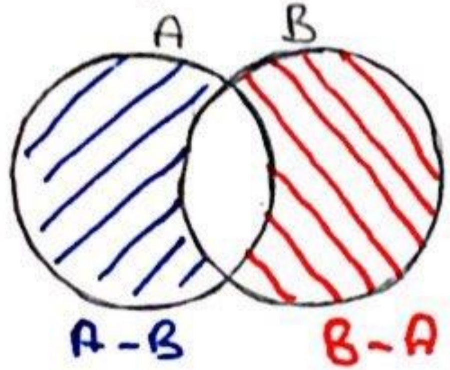


$A \cap B$

Örnek: $A = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 = 9\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} : y < 13\}$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \{-3, 3\}$

Tanım: A ve B iki küme olsun. A kümesinde olan ve B kümesinde olmayan elemanların kümesine A ile B kümesinin <u>farkı</u> denir. $A \setminus B$ veya $A - B$ ile gösterilir.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$



Teorem: E evrensel küme ve $A, B, C \subseteq E$ olsun.

i) $\emptyset \subseteq A$

ii) $A \subseteq A$

iii) $A \subseteq A \cup B$
$B \subseteq A \cup B$

iv) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$

v) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

İspat: v) $A \subseteq B$ ve $B \subseteq C$ olsun. $A \subseteq C$ mi?

$$\forall x \in A \underset{A \subseteq B}{\Longrightarrow} x \in B$$

$$\underset{B \subseteq C}{\Longrightarrow} x \in C$$

$\therefore A \subseteq C$

Teorem: E evrensel küme $A \subseteq E$ olsun.

i) $A \cup \emptyset = A$ i)' $A \cap \emptyset = \emptyset$

ii) $A \cup E = E$ ii)' $A \cap E = A$

iii) $\emptyset' = E$ iii)' $E' = \emptyset$

iv) $A \cup A' = E$ iv)' $A \cap A' = \emptyset$

Teorem: E evrensel küme ve $A, B \subseteq E$ olsun.

i) $A' = E - A$

ii) $A - B = A \cap B'$

iii) $(A')' = A$

iv) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

v) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

vi) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

İspat: ii) $\forall x \in A - B \iff x \in A$ ve $x \notin B$

$\iff x \in A$ ve $x \in B'$

$\iff x \in A \cap B'$

$\therefore A - B = A \cap B'$

veya

$$A - B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$
$$= \{x : x \in A \text{ ve } x \in B'\} = A \cap B'$$

vi) $$(A \cup B)' = \{x : x \notin A \cup B\}$$
$$= \{x : x \notin A \text{ ve } x \notin B\}$$
$$= \{x : x \in A' \text{ ve } x \in B'\}$$
$$= A' \cap B'$$

Teorem: A, B ve C kümeleri verilsin.

i) $A \cup A = A$ i)' $A \cap A = A$

ii) $A \cup B = B \cup A$ ii)' $A \cap B = B \cap A$

iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ iii)' $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ iv)' $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

v) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ v)' $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

İspat: iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$?

$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ --- ①

$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ --- ②   gösterilmeli

$\forall x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ ve $x \in B \cup C$

$\Leftrightarrow x \in A$ ve $(x \in B$ veya $x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A$ ve $x \in B)$ veya $x \in A$ ve $x \in C$

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ veya $x \in A \cap C$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

v) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$

$A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B$ --- (1)

$A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$ --- (2) gösterilmeli

• $A \cap B = A$ olsun. $A \subseteq B$ mi?

$\forall x \in A \Rightarrow x \in A = A \cap B$

$\Rightarrow x \in B \Rightarrow A \subseteq B$ --- (1)

• $A \subseteq B$ olsun. $A \cap B = A$ mı?

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \Rightarrow A \cap B \subseteq A \\ \forall x \in A \underset{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow A \subseteq A \cap B \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow A \cap B = A$ ... (2)

(1) ve (2) den $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$ dir.

Tanım: Arakesiti boş olan iki kümeye <u>ayrık kümeler</u> denir.

Tanım: A ve B iki küme olsun. $(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ kümesine A ile B kümelerinin <u>simetrik farkı</u> denir ve $A\Delta B$ ile gösterilir.

$$A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B)$$
$$= (A-B)\cup(B-A)$$

Örnek: $A=\{a,b,c,d\}$ $B=\{d,e,f\}$

$$A\Delta B=\{x : x\in A\cup B \text{ ve } x\notin A\cap B\}$$
$$=\{a,b,c,e,f\}$$

NOT: A ve B sonlu iki küme olsun.

$$s(A\cup B)=s(A)+s(B)-s(A\cap B)$$

Örnek: $A=\{x\in\mathbb{R} : x^2-5x+4\leq 0\}$

$B=\{x\in\mathbb{R} : x^2-7x+10\geq 0\}$ olsun.

$x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$

x		1		4	
	+		−		+

$A=\{x\in\mathbb{R} : 1\leq x\leq 4\}=[1,4]$

$x^2-7x+10=(x-5)(x-2)$

x		2		5	
	+		−		+

$B=\{x\in\mathbb{R} : x\leq 2 \vee x\geq 5\}$
$=(-\infty,2]\cup[5,\infty)$

* $A\cup B=\{x\in\mathbb{R} : x\in A \text{ veya } x\in B\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : x\leq 4 \text{ veya } x\geq 5\}=(-\infty,4]\cup[5,\infty)$

* $A\cap B=\{x\in\mathbb{R} : x\in A \text{ ve } x\in B\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : 1\leq x\leq 2\}=[1,2]$

* $A-B=\{x\in\mathbb{R} : x\in A \text{ ve } x\notin B\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : x\in A \text{ ve } x\in B'\}$
$=\{x\in\mathbb{R} : 2< x\leq 4\}=(2,4]$

Örnek: $A \cup B = E$ ise $A' \subseteq B$ dir. Gösteriniz.

$A \cup B = E$ olsun. $A' \subseteq B$ mi?

$$\forall x \in A' \Rightarrow x \in E$$
$$\Rightarrow x \in A \cup B$$
$$\Rightarrow x \in B \Rightarrow A' \subseteq B$$

Örnek: $A - B = B' - A'$ olduğunu gösteriniz.

$$\forall x \in A - B \Leftrightarrow x \in A \text{ ve } x \notin B$$
$$\Leftrightarrow x \notin A' \text{ ve } x \in B'$$
$$\Leftrightarrow x \in B' \text{ ve } x \notin A'$$
$$\Leftrightarrow x \in B' - A'$$

Küme Aileleri

I bir küme olsun. I kümesinin her bir $i \in I$ elemanı için bir A_i kümesi varsa bütün bu A_i kümelerinin topluluğu olan $\{A_i : i \in I\}$ kümesine bir <u>küme ailesi</u>, I kümesine