BAĞINTI VE FONKSİYONLAR

Tanım: A ve B boştan farklı iki küme olsun. $A \times B$ nin her alt kümesine A dan B ye bir <u>bağıntı</u> denir.

$\mathcal{R} \subseteq A \times B$, $(a,b) \in \mathcal{R}$ ise $a \in A$ ile $b \in B$ elemanı bağıntılıdır denir ve $a \mathcal{R} b$ ile gösterilir.

$A = B$ ise $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ bağıntısına A da bir bağıntı denir.

Örnek: $A = \{x, y, z, t\}$, $B = \{m, n\}$

$\mathcal{R} = \{(x,m), (y,n), (z,m), (z,n), (t,n)\} \subseteq A \times B$

$(y,n) \in \mathcal{R} \Longleftrightarrow y \mathcal{R} n$

Tanım: A ve B iki küme, $\mathcal{R}$ A dan B ye bir bağıntı olsun. $\mathcal{R}^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in \mathcal{R}\}$ bir bağıntıdır ve bu bağıntıya $\mathcal{R}$ bağıntısının tersi denir.

Bir önceki örnekteki bağıntının tersi

$$\mathcal{R}^{-1} = \{(m,x), (n,y), (m,z), (n,z), (n,t)\} \subseteq B \times A$$

Tanım: $\mathcal{R}$, A dan B ye bir bağıntı olsun.

$$\{a \in A : \exists\, b \in B \text{ için } a\mathcal{R}b\} \text{ ve}$$
$$\{b \in B : \exists\, a \in A \text{ için } a\mathcal{R}b\}$$

kümelerine sırasıyla $\mathcal{R}$ bağıntısının <u>tanım</u> ve <u>değer</u> kümeleri denir.

Tanım: $\mathcal{R}$, A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun.

i) $\forall a \in A$ için $a\mathcal{R}a$ $((a,a) \in \mathcal{R})$ oluyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısının <u>yansıma özelliği</u> vardır veya $\mathcal{R}$ bağıntısı <u>yansıyandır</u> denir.

Örnek: $A = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{R} = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c)\}$$

ii) $a, b \in A$ için $\forall (a,b) \in \mathcal{R}$ iken $(b,a) \in \mathcal{R}$ oluyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısına simetrik bağıntı denir.

Örnek: $A = \{x, y, z, t\}$

$\mathcal{R} = \{(x,y), (y,x), (x,t), (t,x)\}$

$\beta = \{(x,x), (z,z)\}$

iii) $a, b \in A$ için $\forall (a,b) \in \mathcal{R}$ ve $(b,a) \in \mathcal{R} \Rightarrow a = b$ oluyorsa $\mathcal{R}$ ye ters simetrik bağıntı denir.

iv) $a, b, c \in \mathcal{R}$ için

$\forall (a,b) \in \mathcal{R}$ ve $(b,c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a,c) \in \mathcal{R}$ sağlanıyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısının geçişme özelliği vardır denir.

Örnek: $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\beta = \{(1,2), (3,1), (2,4), (1,4), (1,1)\}$

$(3,1) \in \beta$ ve $(1,2) \in \beta$ olduğu halde $(3,2) \notin \beta$ dır.
Dolayısıyla geçişme özelliği yoktur.

Tanım: $\mathcal{R}$, A üzerinde bir bağıntı olsun. $\mathcal{R}$ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa $\mathcal{R}$ ye A üzerinde bir <u>denklik bağıntısı</u> denir.

Örnek: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y \iff 4 \mid x-y$ biçiminde tanımlanan $\sim$ bir denklik bağıntısı mıdır?

$$4 \mid x-y \iff x-y = 4k,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sim = \{ \ldots, (1,5), (5,1), (2,6), \ldots \}$$

* yansıma özelliği: $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x \sim x$ mıdır?

$$x-x = 0 = 4.0 \Rightarrow 4 \mid x-x \Rightarrow x \sim x$$

* simetri özelliği : $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y \Rightarrow y \sim x$?

$$x \sim y \Rightarrow 4 \mid x-y \Rightarrow x-y = 4t,\ t \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow y-x = 4(-t),\ -t \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow 4 \mid y-x$$
$$\Rightarrow y \sim x$$

* $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y$ ve $y \sim z \Rightarrow x \sim z$ mi?

$$x \sim y \text{ ve } y \sim x \Longrightarrow 4 \mid x-y,\ 4 \mid y-z$$
$$\Longrightarrow x-y = 4k,\ y-z = 4t,\ k, t \in \mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow x-z = 4(k+t),\ k+t \in \mathbb{Z}$$
$$\Longrightarrow 4 \mid x-z$$
$$\Longrightarrow x \sim z$$

$\therefore \sim$ bir denklik bağıntısıdır.

Örnek: $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde tanımlı

$\beta = \{(1,2), (2,1), (1,1), (2,2), (3,3), (4,5), (5,4), (4,4), (5,5)\}$

bağıntısının hangi özellikleri sağladığını araştırınız.

* $1 \in C$ için $(1,1) \in \beta$ $3 \in C$ için $(3,3) \in \beta$
$2 \in C$ için $(2,2) \in \beta$ $4 \in C$ için $(4,4) \in \beta$
$5 \in C$ için $(5,5) \in \beta$
$\forall x \in C$ için $(x,x) \in C$ olduğu için yansıma özelliği vardır.

* $\forall x,y \in C$ için $(x,y) \in \beta \Rightarrow (y,x) \in \beta$ mı?
$(1,2) \in \beta \Rightarrow (2,1) \in \beta$
$(4,5) \in \beta \Rightarrow (5,4) \in \beta$
olduğu için β bağıntısının simetri özelliği vardır.

* $\forall x,y \in C$ için $(x,y) \in \beta$ ve $(y,x) \in \beta \Rightarrow x = y$ mi?
$(1,2) \in \beta$ ve $(2,1) \in \beta \Rightarrow 1 \neq 2$ olduğundan β bağıntısının ters simetri özelliği yoktur.

* $\forall x,y,z \in C$ için $(x,y)\in\beta$ ve $(y,z)\in\beta \Rightarrow (x,z)\in\beta$ sağlandığından β bağıntısının geçişme özelliği vardır.

Örnek: S ile T, X kümesinden Y kümesine iki bağıntı olsun $(S\cap T)^{-1} = S^{-1}\cap T^{-1}$ olduğunu gösteriniz

$$S \subseteq X\times Y \qquad T \subseteq X\times Y$$

$$S^{-1} = \{(y,x) : (x,y)\in S\} \qquad T^{-1} = \{(z,t) : (t,z)\in T\}$$

$$\begin{aligned}
(S\cap T)^{-1} &= \{(a,b) : (b,a)\in S\cap T\} \\
&= \{(a,b) : (b,a)\in S \text{ ve } (b,a)\in T\} \\
&= \{(a,b) : (a,b)\in S^{-1} \text{ ve } (a,b)\in T^{-1}\} \\
&= \{(a,b) : (a,b)\in S^{-1}\cap T^{-1}\} \\
&= S^{-1}\cap T^{-1}
\end{aligned}$$

Örnek: Bir A kümesi üzerinde α ve β gibi iki bağıntı verilsin. α ve β simetrik ise $\alpha \cup \beta$ simetriktir. Gösteriniz.

$$\forall a,b \in A \text{ için } (a,b) \in \alpha \cup \beta \Rightarrow (b,a) \in \alpha \cup \beta \ ?$$

$$\begin{aligned}(a,b) \in \alpha \cup \beta &\Rightarrow (a,b) \in \alpha \text{ veya } (a,b) \in \beta \\ &\Rightarrow (b,a) \in \alpha \text{ veya } (b,a) \in \beta \\ &\Rightarrow (b,a) \in \alpha \cup \beta\end{aligned}$$

$\therefore$ $\alpha \cup \beta$ simetriktir.

Tanım: $\sim$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $a \in X$ için a elemanının denklik sınıfı;

$$\bar{a} = \{ b \in X : a \sim b \}$$

kümesidir.

Örnek: $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow 4 \mid x - y$ olsun.

$$\bar{1} = \{ y \in \mathbb{Z} : 1 \sim y \} = \{ y \in \mathbb{Z} : 4 \mid 1 - y \}$$
$$= \{ \ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots \}$$

$\bar{1} = \{ \ldots, -4, -2, 2, 6, \ldots \}$

$\bar{5} = \{ \ldots, -7, -3, 1, 5, 9, \ldots \}$

* $\bar{1} = \bar{5}$ $(1 \sim 5)$

Önerme: $\sim$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun $a, b \in X$ olmak üzere $a \sim b \iff \bar{a} = \bar{b}$ olmasıdır.

İspat:

$(\Rightarrow:)$ $a \sim b$ olsun. $\bar{a} = \bar{b}$ mi?

$$\left.\begin{array}{l} c \in \bar{a} \Rightarrow c \sim a \xRightarrow[a \sim b]{} c \sim b \Rightarrow c \in \bar{b} \\ c \in \bar{b} \Rightarrow c \sim b \xRightarrow[a \sim b]{} c \sim a \Rightarrow c \in \bar{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$$

$(\Leftarrow:)$ $\bar{a} = \bar{b}$ olsun. $a \sim b$ mi?

$\sim$ denklik bağıntısı olduğundan yansıma özelliği vardır.

$a \in \bar{a} \xRightarrow[\bar{a} = \bar{b}]{} a \in \bar{b} \Rightarrow a \sim b$

Teorem: $\sim$, X kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. X in tüm elemanlarının denklik sınıflarının oluşturduğu aile X kümesinin bir ayrışımıdır.

$$\mathcal{A} = \{ \bar{a} : a \in X \}$$

İspat: i) $\forall \bar{a} \in \mathcal{A}$ olsun. $a \in \bar{a} \Rightarrow \bar{a} \neq \emptyset$

ii) $\bar{a}, \bar{b} \in \mathcal{A}$, $\bar{a} \neq \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$ mi?

$\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$ olsun.

$$c \in \bar{a} \cap \bar{b} \Rightarrow c \in \bar{a} \text{ ve } c \in \bar{b}$$
$$\Rightarrow a \sim c \text{ ve } c \sim b$$
$$\Rightarrow a \sim b \Rightarrow \bar{a} = \bar{b} \quad (\text{Çelişki } \bar{a} \neq \bar{b} \text{ idi})$$

$$\therefore \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$$

iii) $\bigcup_{\bar{a} \in \mathcal{A}} \bar{a} = X$ mi?

$$b \in \bigcup_{\bar{a} \in \mathcal{A}} \bar{a} \Rightarrow \exists \bar{a} \in \mathcal{A} \ni b \in \bar{a} \subseteq X$$
$$\Rightarrow b \in X \Rightarrow \bigcup_{\bar{a} \in \mathcal{A}} \bar{a} \subseteq X$$

$$b \in X \Rightarrow b \in \bar{b} \Rightarrow b \in \bigcup_{\bar{a} \in \mathcal{A}} \bar{a} \Rightarrow X \subseteq \bigcup_{\bar{a} \in \mathcal{A}} \bar{a}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{\bar{a} \in \mathcal{A}} \bar{a} = X$$

$\therefore$ $\mathcal{A}$ ailesi X in bir ayrışımıdır.

Teorem: $\{A_i : i \in I\}$ küme ailesi X kümesinin bir ayrışımı olsun Bu taktirde A_i kümelerinden her biri birer denklik sınıfı olacak şekilde X üzerinde bir denklik bağıntısı vardır.

$x, y \in X$ için $x N y \iff \exists\, i \in I$ için $x, y \in A_i$

biçiminde tanımlanan N, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım: N, A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. N bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesine A kümesinin N denklik bağıntısına göre <u>bölüm kümesi</u> denir ve $A/_N$ ile gösterilir

$$A/_N = \{\bar{a} : a \in A\}$$

NOT: $A/_N$ bölüm kümesindeki her bir denklik sınıfından birer eleman alarak oluşturulan kümeye de <u>tam temsilciler kümesi</u> denir.

Örnek: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ için $x \sim y \Leftrightarrow 4 \mid x-y$ olsun.

$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$\{0,1,2,3\} \longrightarrow$ tam temsilciler kümesi

Önerme: $\sim$, A kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Denklik bağıntısının birbirinden farklı denklik sınıfları ikişer ikişer ayrıktır.

İspat: $A/_{\sim} = \{\bar{x} : x \in A\}$

$\bar{x}, \bar{y} \in A/_{\sim}$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ için $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$ mi?

$\bar{x} \neq \bar{y}$ ve $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ olsun. O halde $\exists\, z \in \bar{x} \cap \bar{y}$ vardır.

$$z \in \bar{x} \cap \bar{y} \Rightarrow z \in \bar{x} \text{ ve } z \in \bar{y}$$
$$\Rightarrow x \sim z \text{ ve } z \sim y$$
$$\Rightarrow x \sim y \Rightarrow \bar{x} = \bar{y} \quad (\text{çelişki } \bar{x} \neq \bar{y} \text{ idi})$$

$\therefore \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

Tanım: A boştan farklı bir küme, ρ A kümesi üzerinde bir bağıntı olsun. ρ bağıntısının yansıma, ters simetri ve geçişme özellikleri varsa ρ ya bir sıralama (kısmi sıralama) bağıntısı denir.

A kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısı varsa A kümesine sıralı küme (kısmi sıralı küme) denir.

Örnek: $\mathbb{Z}$ kümesinde, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için

$$a \rho b \iff a \leq b$$

biçiminde tanımlanan ρ, bir sıralama bağıntısıdır.

Örnek: $\mathbb{Z}^*$ kümesinde, $\forall x, y \in \mathbb{Z}^*$ için

$$x \rho y \iff x \mid y$$

biçiminde tanımlanan ρ, bir sıralama bağıntısı değildir.