FONKSİYONLAR

Tanım: A ve B boştan farklı iki küme ve f, A dan B ye bir bağıntı olsun. f bağıntısıyla A kümesindeki her bir eleman B kümesindeki bir ve yalnız bir elemanla eşleniyorsa f ye A dan B ye bir <u>fonksiyon</u> denir. f, A dan B ye bir fonksiyon ise

$$f: A \longrightarrow B$$
$$a \longmapsto f(a)$$

ile gösterilir.

A : Tanım kümesi

B : Değer kümesi

f(A) : Görüntü kümesi

* $f(a) = b \in B$ elemanına da $a \in A$ elemanının <u>görüntüsü</u> denir.

* $\{(a, f(a)) : a \in A\}$ kümesine de f fonksiyonunun <u>grafiği</u> denir.

* $f: A \longrightarrow A$ şeklinde tanımlanan fonksiyona birim
$a \longmapsto a$
fonksiyon veya özdeşlik fonksiyon denir ve I_A ile gösterilir.

* $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olsun.
i) $\forall x \in A$ için $(x,y) \in f$ olacak şekilde $y \in B$ olmalı
ii) (x,y); $(x,z) \in f$ ise $y = z$ olmalı
Yani f nin bir fonksiyon olması için kapalı ve iyi tanımlı olması gerekir. İyi tanımlılık :
$\forall a_1, a_2 \in A$ için $a_1 = a_2 \Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$

* $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyon, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ olsun.

$$f(A) = \{ f(a) : a \in A \}$$

kümesine A kümesinin f fonksiyonu altındaki görüntü kümesi denir.

$$f^{-1}(B)=\{x\in X : f(x)\in B\}$$

kümesine de B kümesinin f fonksiyonu altındaki <u>ters görüntü kümesi</u> denir.

Tanım: $f: A\longrightarrow B$, $g: C\longrightarrow D$ fonksiyonu verilmiş olsun. $A=C$ ve $B=D$ için $\forall a\in A$ olmak üzere $f(a)=g(a)$ oluyorsa f ve g fonksiyonlarına <u>eşittirler</u> denir ve $f=g$ ile gösterilir.

Tanım: $f: A\longrightarrow B$ bir fonksiyon olsun.

$$\forall x_1,x_2\in A \text{ için } x_1\neq x_2 \Longrightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$$

oluyorsa f <u>bire-bir</u> (1-1) bir fonksiyondur denir. Başka bir ifadeyle

$$\forall x_1,x_2\in A \text{ için } f(x_1)=f(x_2)\Longrightarrow x_1=x_2$$

sağlanıyorsa f 1-1 dir. $f: A\xrightarrow{1-1} B$ veya $f: A\longleftrightarrow B$ ile gösterilir.

Örnek: • $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = 2x+1$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ mi?

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$$
$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$$
$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

$\therefore f$, 1-1 bir fonksiyondur.

• $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto g(x) = |x-1|$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$g(x) = g(y) \Rightarrow |x-1| = |y-1|$$

$x = 3$, $y = -1$ için $f(3) = 2$, $f(-1) = 2$ ama $3 \neq -1$

olduğundan g 1-1 bir fonksiyon değildir.

Tanım: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. Her $b \in B$ için $f(a) = b$ olacak şekilde en az bir tane $a \in A$ elemanı varsa f fonksiyonu <u>örtendir</u> denir. Yani;

$$\forall b \in B \text{ için } \exists a \in A \ni f(a) = b$$

oluyorsa f fonksiyonu örtendir. $f: A \xrightarrow{\text{örten}} B$ veya $f: A \twoheadrightarrow B$ ile gösterilir.

Örnek: • $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ örten bir fonksiyondur.
$x \mapsto f(x) = 3x - 1$

• $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = -2$ olacak
$x \mapsto g(x) = x^2$
şekilde $x \in \mathbb{R}$ olmadığından örten değildir.

Tanım: $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. $b \in Y$ sabit bir eleman olmak üzere her $x \in X$ için $f(x) = b$ oluyorsa f fonksiyonuna <u>sabit fonksiyon</u> denir.

Tanım: $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A \subseteq X$ olsun. $\forall a \in A$ için $g(a) = f(a)$ ile tanımlanan g fonksiyonuna f fonksiyonunun A kümesine <u>kısıtlanısı</u> denir.
$g = f\downarrow_A$ ile gösterilir.

Aynı şartlarda f fonksiyonuna g fonksiyonunun <u>genişletilmiş</u> fonksiyonu denir ve $f = g\uparrow_X$ ile gösterilir.

Tanım: $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon olsun. $\forall x \in X$ için $h(x) = g(f(x))$ biçiminde tanımlanan $h: X \longrightarrow Z$ fonksiyonuna f ile g fonksiyonlarının <u>bileşke fonksiyonu</u> denir ve $h = g \circ f$ ile gösterilir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

Teorem: $f : X \longrightarrow Y$ ve $g : Y \longrightarrow Z$ iki fonksiyon olsun.

i) gof, 1-1 bir fonksiyon ise f 1-1 dir.

ii) gof, örten bir fonksiyon ise g örtendir.

İspat: i) gof, 1-1 bir fonksiyon olsun. f 1-1 mi?

$$\forall\, x, y \in X \text{ için } f(x) = f(y) \Rightarrow g(f(x)) = g(f(y))$$

$$\Rightarrow (gof)(x) = (gof)(y)$$

$$\Rightarrow x = y$$

$\therefore f$ 1-1 dir.

ii) $g \circ f$, örten bir fonksiyon olsun. g örten mi?

$\forall z \in Z$ için $\exists y \in Y \ni g(y) = z$ mi?

$g \circ f$ örten $\Rightarrow \forall z \in Z$ için $\exists x \in X \ni (g \circ f)(x) = z$

$\Rightarrow \forall z \in Z$ için $\exists x \in X \ni g(\underbrace{f(x)}_{\in Y}) = z$

$\Rightarrow \forall z \in Z$ için $\exists y \in Y \ni g(y) = z$.

$\therefore$ g örtendir.

Teorem: $f: X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon, $A_1, A_2 \subseteq X$ ve $B_1, B_2 \subseteq Y$ olsun.

i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

ii) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

iii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

iv) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

özellikler: sağlanır.

İspat: i) $f(x) \in f(A_1 \cup A_2) \Longleftrightarrow x \in A_1 \cup A_2$

$\Longleftrightarrow x \in A_1$ veya $x \in A_2$

$\Longleftrightarrow f(x) \in f(A_1)$ veya $f(x) \in f(A_2)$

$\Longleftrightarrow f(x) \in f(A_1) \cup f(A_2)$

ii) $f(x) \in f(A_1 \cap A_2) \Longrightarrow x \in A_1 \cap A_2$

$\Longrightarrow x \in A_1$ ve $x \in A_2$

$\Longrightarrow f(x) \in f(A_1)$ ve $f(x) \in f(A_2)$

$\Longrightarrow f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2)$

$\therefore f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$

$A_1 = \{-1, -2, 3, 4\}$
$A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$

$A_1 \cap A_2 = \{3, 4\}$

$f(A_1) = \{1, 4, 9, 16\}$

$f(A_1 \cap A_2) = \{9, 16\}$

$f(A_2) = \{1, 4, 9, 16\}$

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 4, 9, 16\}$

$$f(A_1) \cap f(A_2) \neq f(A_1 \cap A_2)$$

Eğer f 1-1 ise eşitlik sağlanır. Yani;

$f(x) \in f(A_1) \cap f(A_2) \Longrightarrow f(x) \in f(A_1)$ ve $f(x) \in f(A_2)$

$\Longrightarrow f(x) = f(a_1),\ a_1 \in A_1$ ve $f(x) = f(a_2),\ a_2 \in A_2$

$\underset{f\ 1\text{-}1}{\Longrightarrow} f(x) = f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2 = x$

$\Longrightarrow x \in A_1$ ve $x \in A_2 \Longrightarrow x \in A_1 \cap A_2$

$\Longrightarrow f(x) \in f(A_1 \cap A_2)$

iii) $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1$ veya $f(x) \in B_2$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1)$ veya $x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

iv) $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2$

$\Leftrightarrow f(x) \in B_1$ ve $f(x) \in B_2$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1)$ ve $x \in f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Önerme: $f: X \to Y$ bir fonksiyon, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ olsun.

i) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

ii) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

f 1-1 ise $f^{-1}(f(A)) = A$

f örten ise $f(f^{-1}(B)) = B$ olur.

İspat: i) $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$

f 1-1 ise

$x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A)$

$\Rightarrow \exists y \in A \ni f(x) = f(y)$

$\xRightarrow{f\ 1\text{-}1} x = y$

$\Rightarrow x \in A$

ii)

$y \in f(f^{-1}(B)) \Rightarrow \exists x \in A$ için $\exists x \in f^{-1}(B) \ni f(x) = y$

$\Rightarrow y \in B$

f örten ise

$y \in B \underset{f \text{ örten}}{\Rightarrow} \exists x \in A \ni f(x) = y$

$\Rightarrow x \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f(x) \in f(f^{-1}(B))$

Tanım: A kümesi ve $C \subseteq A$ kümesi verilmiş olsun. $\forall c \in C$ için $i(c) = c$ ile tanımlanan $i : C \longrightarrow A$ fonksiyonuna <u>içerme</u> fonksiyonu denir.

Teorem: $f : A \longrightarrow B$ fonksiyon, $\{A_i : i \in I\} \subseteq P(A)$, $\{B_j : j \in J\} \subseteq P(B)$ olsun.

i) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$

ii) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

iii) $f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

iv) $f^{-1}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(B_j)$

Not: i) $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$ olmak