



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik II

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

KAFESLER

Tanım: (A, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in A$ için $\sup\{x, y\}$, $\inf\{x, y\}$ mevcutsa A ya bir kafes (latis) denir.

Ayrıca

$$\sup\{x, y\} = x \vee y$$

$$\inf\{x, y\} = x \wedge y$$

ile gösterilir.

Bu takdirde aşağıdakiler geçerlidir.

$\forall x, y \in A$ için

- i) $x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$
- ii) $x \leq y \wedge z \leq y \Rightarrow x \vee z \leq y$
- iii) $x \wedge y \leq x$, $x \wedge y \leq y$
- iv) $x \leq y \wedge x \leq z \Rightarrow x \leq y \wedge z$

Örnek: Tanımda verilen A yerine \mathbb{Z} alınırsa (\mathbb{Z}, \leq) bir kafestir.
 $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ için $a \leq b$ verildiğinde $a \vee b = b$, $a \wedge b = a$ olup \mathbb{Z} bir kafestir.

Örnek: $A \neq \emptyset$ olmak üzere $(2^A, \subseteq)$ bir kafestir.
 $A_1, A_2 \in 2^A$ olsun.

$$A_1 \vee A_2 = A_1 \cup A_2$$

$$A_1 \wedge A_2 = A_1 \cap A_2$$

alınırsa 2^A kümesinin kafes olduğu görülür.

Önerme: (A, \leq) bir kafes olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler verilebilir.

$$\forall x, y, z \in A \text{ için}$$

$$i) \quad x \vee x = x$$

$$ii) \quad x \vee y = y \vee x$$

$$iii) \quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$iv) \quad (x \vee y) \wedge x = x$$

$$i') \quad x \wedge x = x$$

$$ii') \quad x \wedge y = y \wedge x$$

$$iii') \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

$$iv') \quad (x \wedge y) \vee x = x$$

Tanım: (A, \leq) kısmi sıralı bir küme olsun. \vee, \wedge , A üzerinde bir ikili işlemdir. Bu işlemler aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned} \vee: A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto x \vee y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wedge: A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto x \wedge y \end{aligned}$$

Tanım: (A, \leq) bir kafes, $B \neq \emptyset$, $B \subseteq A$ olsun. Her $x, y \in B$ için $x \vee y \in B$ ve $x \wedge y \in B$ ise B ye A nin alt kafesi denir.

Örnek: (\mathbb{R}, \leq) bir kafestir. \mathbb{R} nin boş olmayan her alt kümesi \mathbb{R} nin bir alt kafesidir.

Örnek: $A \neq \emptyset$, $(2^A, \subseteq)$ bir kafestir. 2^A nin bostan farklı her alt kümesi bir alt kafestir.

Tanım: (A, \subseteq) bir kafes olsun.

- i) $\exists 0 \in A, \exists 1 \in A$ olmak üzere $\forall x \in A$ için

$$x \vee 0 = x \quad x \wedge 1 = x$$
- ii) $\forall x \in A$ için $\exists x' \in A$ $\exists \quad x \vee x' = 1, x \wedge x' = 0$
- iii) $\forall x, y, z \in A$ için

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

özelliklerini sağlayan (A, \subseteq) ikilisine Boole cebiri denir.

Burada x' ne x in tamlayanı, (iii) deki özelliğe dağılma özelliği denir. Tüm elemanlarının tamlayanı mevcut olan kafese tamlanmış kafes; dağılma özelliğini sağlayan kafese de

dağılmalı kates denir.

Örnek: $A \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $(P(A), U, \cap)$ bir Boole cebiridir.

$$0 := \emptyset, \quad 1 := A, \quad A' := A^t$$

- $B \in P(A) \Rightarrow B \cup \emptyset = B, \quad B \cap A = B$
- $B \cup B^t = A, \quad B \cap B^t = \emptyset$
- U nin \cap üzerine, \cap nin U üzerine dağılma özelliği olduğundan iii de sağlanır.

$\therefore (P(A), U, \cap)$ bir Boole cebiridir.

Örnek: Önermeler cebirinde tüm önermelerin kümesini \mathcal{R} ile

gösterelim. (R, \vee, \wedge) bir Boole cebiridir.

$$0 := \vee$$

$$x' := \neg x$$

$$1 := \wedge$$

alınrsa istenilen elde edilir.

Örnek: A bir kafes ve $a \leq b$ ise $\forall x \in A$ için
 $a \vee x \leq b \vee x$

olduğunu gösteriniz.

A bir kafes olduğundan her hangi iki elemanın supremumu vardır. $c = \sup \{b, x\} = b \vee x$ olsun.

$$b \leq c \text{ ve } x \leq c \Rightarrow a \leq c \text{ ve } x \leq c$$

($a \leq b$)

olduğundan, supremum tanımından

$$\sup \{a, x\} = a \vee x \leq c = b \vee x$$

elde edilir.

$$\therefore a \vee x \leq b \vee x$$