RASYONEL SAYILAR

$2x=3$ denkleminin tam sayılarda çözümü yoktur. Bu denklemi çözmek demek $2x \geq 3$, $2x \leq 3$ eşitsizliklerinin ortak çözümünü bulmak demektir.

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 2x \geq 3\} = \{2,3,4,\dots\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} : 2x \leq 3\} = \{1,0,-1,-2,\dots\} \quad \text{olsun.}$$

$A \cap B = \emptyset$ olduğundan $2x=3$ denkleminin $\mathbb{Z}$ sayı sisteminde çözümü yoktur. Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ genişletilmelidir.

Tanım: $(m,n), (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için

$$(m,n)\, \beta\, (p,q) \iff mq = np$$

şeklindedir.

Önerme: Yukarıda tanımlanan β bağıntısı $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat: i) yansıma özelliği

$\forall (m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için $mn = nm$ olduğundan $(m,n)\,\beta\,(m,n)$ dir.

ii) simetri özelliği

$\forall (m,n), (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için $(m,n)\,\beta\,(p,q) \Rightarrow (p,q)\,\beta\,(m,n)$ mi?

$$(m,n)\,\beta\,(p,q) \Rightarrow mq = np$$
$$\Rightarrow np = mq$$
$$\Rightarrow pn = qm \Rightarrow (p,q)\,\beta\,(m,n)$$

iii) geçişme özelliği

$\forall (m,n), (p,q), (r,s) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ için

$$(m,n)\,\beta\,(p,q) \Rightarrow mq = np$$
$$(p,q)\,\beta\,(r,s) \Rightarrow ps = qr$$

- $p = 0 \Rightarrow m = 0 = r \Rightarrow ms = nr \Rightarrow (m,n)\,\beta\,(r,s)$
- $p \neq 0 \Rightarrow m(ps) = m(qr)$

$$= (mq)r = (np)r$$
$$\Rightarrow m(sp) = (np)r$$
$$\Rightarrow (ms)p = (nr)p \Rightarrow ms = nr \Rightarrow (m,n)\,\beta\,(r,s)$$

Tanım: $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\beta = \{\overline{(m,n)} : (m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\}$

bölüm kümesine <u>rasyonel sayılar</u> kümesi denir.

$$\overline{(m,n)} = \{(x,y) : (x,y)\,\beta\,(m,n)\} = \{(x,y) : xn = ym\}$$

denklik sınıflarına da <u>rasyonel sayı</u> denir.

$\mathbb{Q} = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\beta$, $\overline{(m,n)} = [(m,n)]$ ile gösterilir.

Tanım: $[(m,n)], [(p,q)] \in \mathbb{Q}$ için

i) $[(m,n)] \oplus [(p,q)] = [(mq+np, nq)]$ ye $[(m,n)], [(p,q)]$ rasyonel sayıların toplamı

ii) $[(m,n)] \odot [(p,q)] = [(mp, nq)]$ ye $[(m,n)], [(p,q)]$ rasyonel sayıların çarpımı

denir.

Yukarıda verilen $\oplus$, $\odot$ işlemleri iyi tanımlıdır.

Önerme: $[(m,n)], [(p,q)], [(r,s)] \in \mathbb{Q}$ için

i) $[(m,n)] \oplus [(p,q)] = [(p,q)] \oplus [(m,n)]$

ii) $[(m,n)] \oplus ([(p,q)] \oplus [(r,s)]) = ([(m,n)] \oplus [(p,q)]) \oplus [(r,s)]$

iii) $[(m,n)] \odot [(p,q)] = [(p,q)] \odot [(m,n)]$

iv) $[(m,n)] \odot ([(p,q)] \odot [(r,s)]) = ([(m,n)] \odot [(p,q)]) \odot [(r,s)]$

v) $[(m,n)] \odot ([(p,q)] \oplus [(r,s)]) = ([(m,n)] \odot [(p,q)]) \oplus ([(m,n)] \odot [(r,s)])$

Tanım: $[(m,n)] \in \mathbb{Q}$ için $[(-m,n)] = -[(m,n)]$

Önerme: $[(m,n)] \in \mathbb{Q}$ için

i) $[(m,n)] \oplus [(0,1)] = [(m,n)]$

ii) $[(m,n)] \oplus (-[(m,n)]) = [(0,1)]$

iii) $[(m,n)] \odot [(1,1)] = [(m,n)]$

iv) $m \neq 0 \Longrightarrow [(m,n)] \odot [(n,m)] = [(1,1)]$

Tanım: i) $[(m,n)] \in \mathbb{Q}$ için $[(m,n)]$ yerine $\frac{m}{n}$, $\oplus$ yerine $+$, $\odot$ yerine $\cdot$ alınırsa bu takdirde iki rasyonel sayının toplamı, çarpımı ve eşitliği

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq+np}{nq} \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Longleftrightarrow mq = np$$

şeklinde ifade edilir.

ii)
$$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$m \longmapsto f(m) = \frac{m}{1}$$

şeklinde tanımlanırsa $\frac{m}{1} = m$ eşitliği dikkate alınarak $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ kapsaması geçerli olacağından $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi genişletilmiş olacaktır.

Örnek: $2x = 3$ denklemi

$$[(2,1)]\,[(m,n)] = [(3,1)]$$
$$\Rightarrow [(2m,n)] = [(3,1)]$$
$$\Rightarrow 2m = 3n \Rightarrow m=3,\ n=2 \Rightarrow x = [(m,n)] = \frac{3}{2}$$

Tanım: $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ olsun.

i) $\frac{m}{n} > 0 \iff mn > 0 \implies \frac{m}{n}$ ye pozitif rasyonel sayı

ii) $\frac{m}{n} < 0 \iff mn < 0 \implies \frac{m}{n}$ ye negatif rasyonel sayı

denir.

Önerme: ($\mathbb{Q}$ nun üçlük özelliği:)

Her bir $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{m}{n} > 0$, $\frac{m}{n} = 0$ ya da $\frac{m}{n} < 0$

Tanım: $x, y \in \mathbb{Q}$ için $x \leq y \iff x = y \vee y - x > 0$

Önerme: $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi yukarıda verilen tanıma göre tam sıralıdır.

İspat: i) yansıma özelliği:

$\forall x \in \mathbb{Q}$ için $x \leq x$ olduğundan yansıyandır.

ii) ters simetri özelliği

$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ için $x \leq y \wedge y \leq x$ olsun.

$x=\frac{m}{n}$, $y=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ alalım.

$x\leq y \wedge y\leq x \Longrightarrow \frac{p}{q}-\frac{m}{n}\geq 0 \wedge \frac{m}{n}-\frac{p}{q}\geq 0$

$\Longrightarrow qn(pn-mq)\geq 0 \wedge qn(mq-np)\geq 0$

$\Longrightarrow qn(pn-mq)=0,\ qn\neq 0 \Longrightarrow pn-mq=0$

$\Longrightarrow x=y$

iii) geçişme özelliği

$\forall x,y,z\in\mathbb{Q}$ için $x\leq y \wedge y\leq z$ olsun

$x=\frac{m}{n}$, $y=\frac{p}{q}$, $z=\frac{r}{s}\in\mathbb{Q}$ için

$nq(pn-mq)\geq 0 \Rightarrow n^2pq-q^2mn\geq 0$ .... ①

$qs(rq-ps)\geq 0 \Rightarrow q^2rs-s^2pq>0$ .... ②

① s^2 ile ② n^2 ile çarpılırsa

$s^2n^2pq-s^2q^2mn\geq 0 \wedge n^2q^2rs-n^2s^2pq\geq 0$

$\Longrightarrow q^2(n^2rs-s^2mn)\geq 0 \Rightarrow (nr-sm)ns\geq 0$

$\Longrightarrow \frac{r}{s}-\frac{m}{n}\geq 0 \Longrightarrow x\leq z$

Karşılaştırma yapılabildiğinden $(\mathbb{Q}, \leq)$ tam sıralıdır.

Teorem: ($\mathbb{Q}$ nun Arşimet özelliği)

Bir $x \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı için $x < p$ olacak şekilde $p \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır.

İspat: i) $\frac{m}{n} \leq 0 \Rightarrow p = 1$ alınır

ii) $\frac{m}{n} > 0$ olsun. Bu durumda $m.n > 0$ dır. O halde iki durum söz konusudur.

- $n > 0 \Rightarrow m > 0$

$$mn^2 + n^2 - mn > 0 \Rightarrow (m+1) - \frac{m}{n} > 0$$
$$\Rightarrow \frac{m}{n} < m+1$$
$$\Rightarrow p = m+1 \text{ olur.}$$

- $n < 0 \Rightarrow m < 0$

$$-mn^2 + n^2 - mn > 0 \Rightarrow (-m+1) - \frac{m}{n} > 0$$
$$\Rightarrow -m+1 > \frac{m}{n} \Rightarrow p = -m+1 \text{ olur.}$$