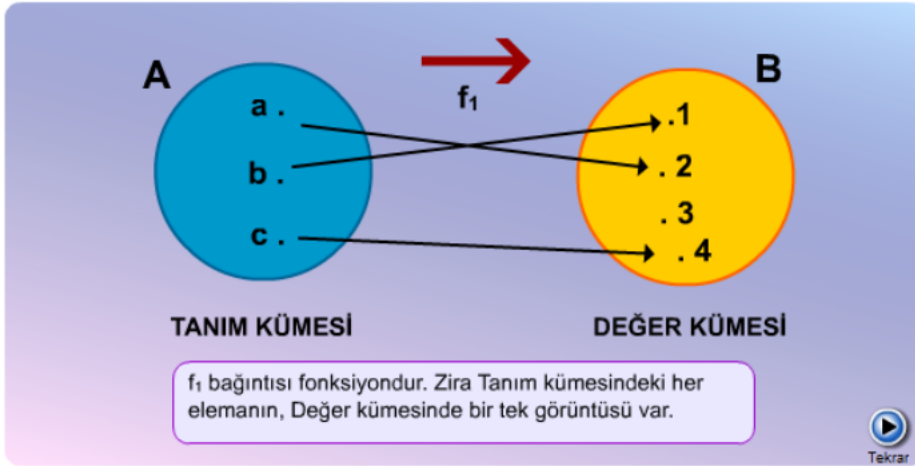


7.2 Fonksiyon ve Fonksiyon Tanımları (I)

Tanım kümesindeki her elemanın değer kümesinde bir ve yalnız bir görüntüsü varsa, tanım kümesinden değer kümesine olan bağıntıya **fonksiyon** denir.

Fonksiyonu " f " ile gösterirsek $y = f(x)$ eşitliğinde x 'e bağımsız değişken y 'ye ise bağlı değişken adı verilir. Fonksiyon tek bir değişkene bağlı ise tek değişkenli, birden çok değişkene bağlı ise çok değişkenli fonksiyon adını alır. $y = f(x)$ tek değişkenli, $z = f(x,y,t,...)$ çok değişkenli fonksiyondur.

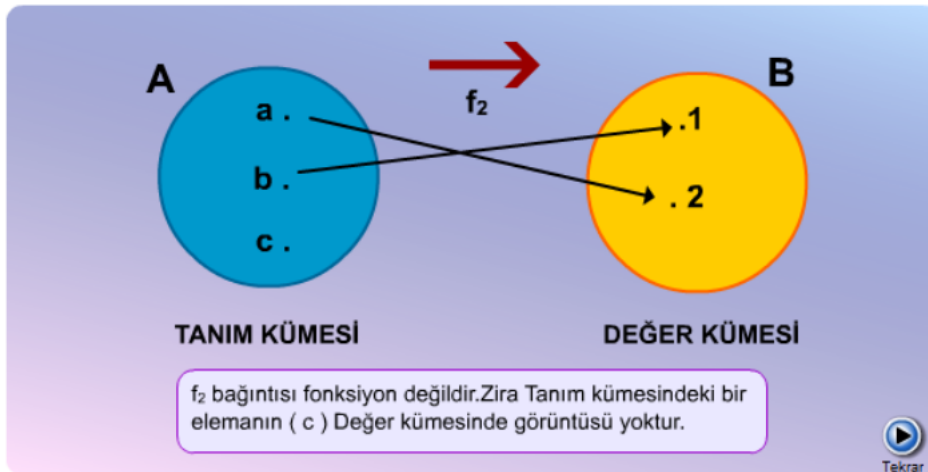


7.2.1 Fonksiyon ve Fonksiyon Tanımları (II)

Aşağıdaki şekilde f_2 bağıntısı bir fonksiyon değildir. Tanım kümesindeki bir elemanın, değer kümesinde görüntüsü yoktur.

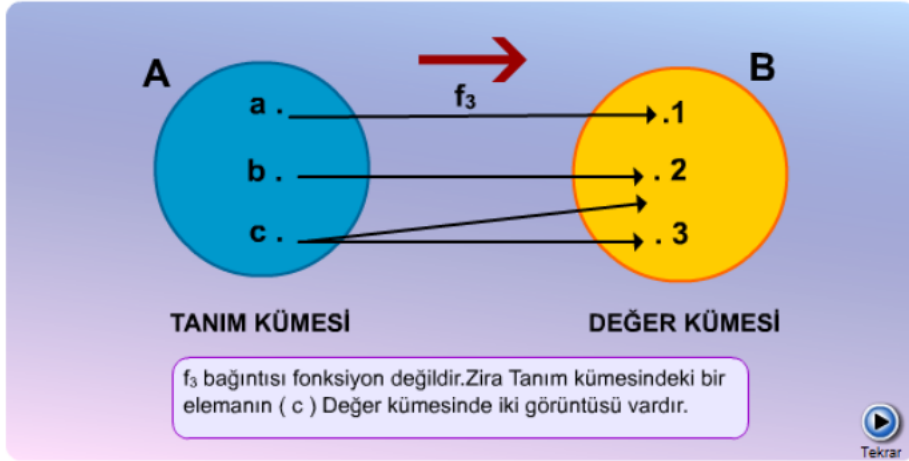
- $f_2(a)=2$
- $f_2(b)=1$

Fakat f_2 fonksiyonu görüntüsündeki "c" elemanını değer kümesinde hiç bir elemana götürememektedir.



7.2.2 Fonksiyon ve Fonksiyon Tanımları (III)

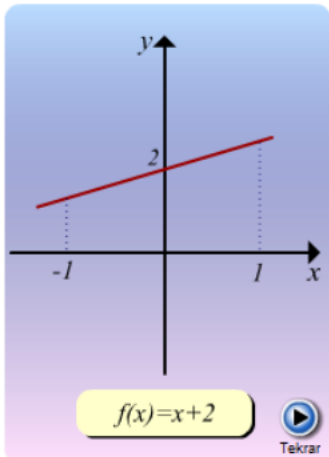
Aşağıdaki f_3 bağıntısını ifade eden şekilde tanım kümesindeki her elemana karşı değer kümesinde bir eleman bulunmaktadır. Fakat f_3 bağıntısı bir fonksiyon değildir. Çünkü tanım kümesindeki "c" elemanına değer kümesinde "2" ve "3" elemanları karşılık gelmektedir. Bu da fonksiyonun tanımına ters düşmektedir. Dolayısıyla f_3 bağıntısı fonksiyon değildir.



7.2.3 Fonksiyon Grafiği (I)

$y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği, bir dik koordinat sisteminde, x bağımsız değişkenin tanım aralığı içinde aldığı $f(x)$ değerleriyle oluşturulan (x, y) sayı çiftlerinin işaretlenmesiyle elde edilir.

(x, y) sayı çiftleri bulunup dik koordinat düzleminde işaretlendikten sonra bir eğriyle birleştirilir. Bu eğri fonksiyonun grafiğini oluşturur.

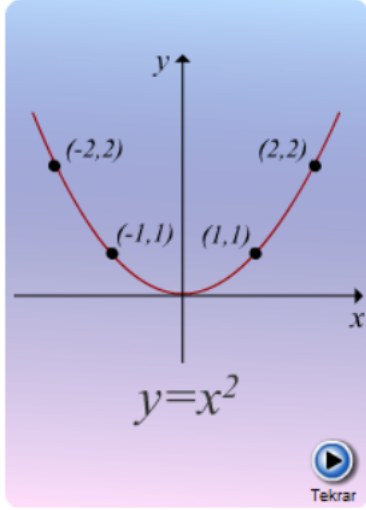


7.2.4 Fonksiyon Grafiği (II)

Örneğin, $[-3, 3]$ aralığında tanımlı $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için önce (x, y) sayı çiftleri belirlenir.

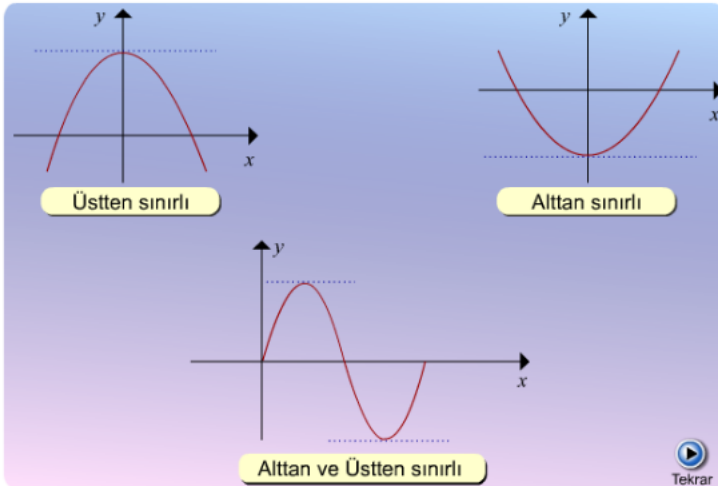
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = f(x) = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Bu sayı çiftleri bir dik koordinat sisteminde işaretlenerek fonksiyonun grafiği elde edilir.



7.2.5 Sınırlı Fonksiyonlar (I)

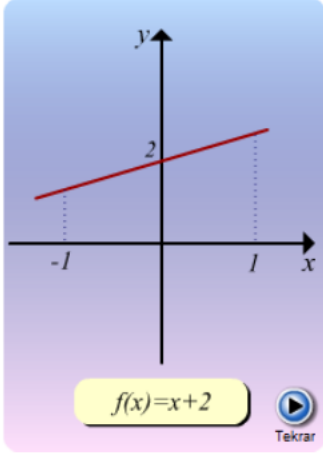
Tanım aralığı içindeki her x elemanı için $f(x) \leq U$ olacak şekilde bir $U \in \mathbb{R}$ varsa, $f(x)$ fonksiyonuna bu aralık içinde **üstten sınırlıdır** denir. $U \in \mathbb{R}$ sayısına da **üst sınır** adı verilir. Tanım aralığı içindeki her x elemanı için $f(x) \geq A$ olacak şekilde bir $A \in \mathbb{R}$ varsa, $f(x)$ fonksiyonuna bu aralık içinde **alttan sınırlıdır** denir. $A \in \mathbb{R}$ sayısına ise **alt sınır** denir. Bu aralık içindeki her x elemanı için $A \leq f(x) \leq U$ olacak şekilde A ve $U \in \mathbb{R}$ varsa, $f(x)$ fonksiyonuna **sınırlı** veya **alttan ve üstten sınırlı** denir.



7.2.6 Sınırlı Fonksiyonlar (II)

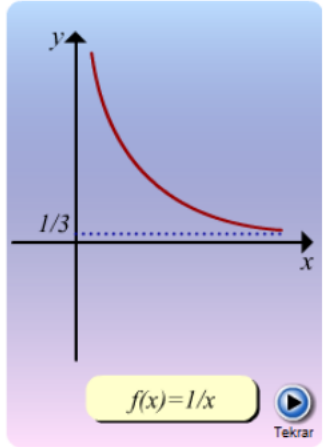
Örnek1 :

$y = f(x) = x + 2$ fonksiyonu $[-1, 1]$ aralığında sınırlıdır. Üst sınır $U = 3$, alt sınır ise $A = 1$ dir.



Örnek2 :

$y = f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0, 3)$ aralığında üstten sınırlı değildir. Zira x 'i sıfıra ne kadar yakın seçersek $f(x)$ 'i o kadar büyük bulabiliriz. Dolayısıyla bir üst sınır yoktur. Alt sınır ise $A = \frac{1}{3}$ dür.



7.2.7 Monoton Fonksiyonlar

Bir aralığın herhangi iki noktası x_1 ve x_2 olduğuna göre; $x_1 < x_2$ oldukça $f(x_1) \leq f(x_2)$ ise $f(x)$ fonksiyonuna bu aralık içinde **monoton artan fonksiyon** denir. $f(x) < f(x_2)$ ise fonksiyon **kesin olarak artandır**.

Eğer $x_1 < x_2$ oldukça $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise fonksiyon **monoton azalandır** $f(x_1) > f(x_2)$ ise **kesin olarak azalandır**.

Kesin olarak artan veya azalan bir fonksiyon aynı zamanda monoton artan veya monoton azalandır.

Bir fonksiyonun monoton artan veya azalan bir fonksiyon olması için kesin olarak artan veya azalan bir fonksiyon olması yeter şarttır.

7.2.8 Açık Fonksiyon-Kapalı Fonksiyon

Bağılı değişken y ile bağımsız değişken x arasındaki ilişki y 'ye göre çözülmüşse fonksiyona **açık fonksiyon**, aksi halde **kapalı fonksiyon** denir.

Açık Fonksiyon	Kapalı Fonksiyon
$y=x^2+x+1$	$x^2+x+1-y=0$

7.2.9 Ters Fonksiyon

Eğer x 'in $f(x)$ şeklinde gösterilen bir fonksiyonu y ise x 'de y 'nin $x = f^{-1}(y)$ şeklinde gösterilen bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Bu fonksiyona **ters fonksiyon** denir.

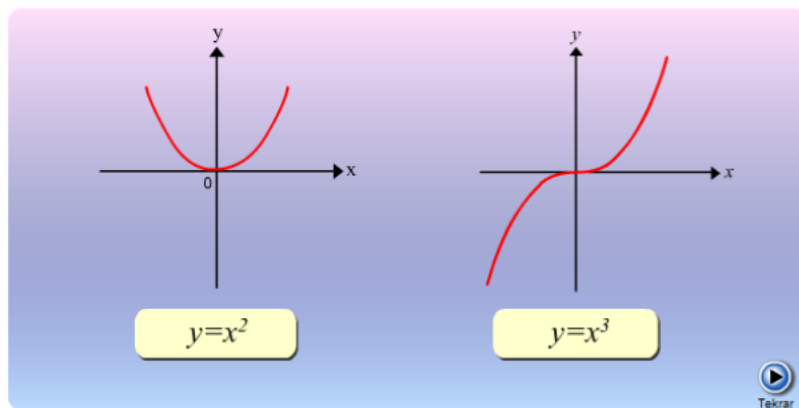
Fonksiyon	Ters Fonksiyonu
$f(x)=x+3$	$f^{-1}(x)=x-3$
$f(x)=\sin(x)$	$f^{-1}(x)=\arcsin(x)$
$f(x)=\log_a(x)$	$f^{-1}(x)=a^x$

 Tekrar

7.2.10 Tek Fonksiyon – Çift Fonksiyon

$[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir $y = f(x)$ fonksiyonu x değişkeninin mutlak değerce eşit (simetrik) pozitif ve negatif değerleri için aynı büyüklüklere sahipse yani, $f(x) = f(-x)$ ise bu fonksiyona **çift fonksiyon** denir. Çift fonksiyonda simetri eksen OY eksenidir. $y = f(x)$ fonksiyonu x değişkeninin mutlak değerce eşit, simetrik değerleri için aynı fakat işareti farklı değerler alıyorsa yani, $f(x) = -f(-x)$ ise bu fonksiyona **tek fonksiyon** denir. Tek fonksiyonun simetri merkezi koordinat eksenlerinin başlangıç noktasıdır.

Örneğin $y = x^2$ fonksiyonu çift fonksiyon, $y = x^3$ fonksiyonu ise tek fonksiyondur ve grafikleri aşağıdaki şekilde gibidir.



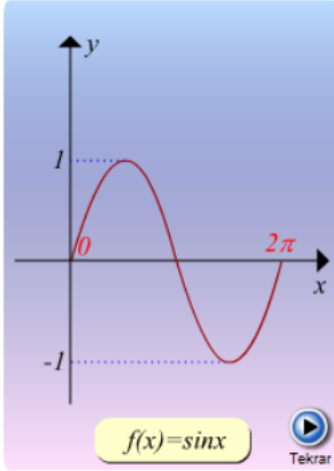
7.2.11 Periyodik Fonksiyon

$y = f(x)$ fonksiyonu, x değişkenin birbirinden belirli bir uzaklık kadar farklı değerleri için aynı büyüklükleri alıyorsa bu fonksiyona **periyodik fonksiyon** denir. Fonksiyonun periyodu T ise apsisi x ve $x + T$ olan noktaların ordinatları arasında $f(x) = f(x+T)$ bağıntısı vardır.

Örneğin :

$f(x) = \sin(x)$ periyodik fonksiyondur. Çünkü $f(x) = \sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ dir.

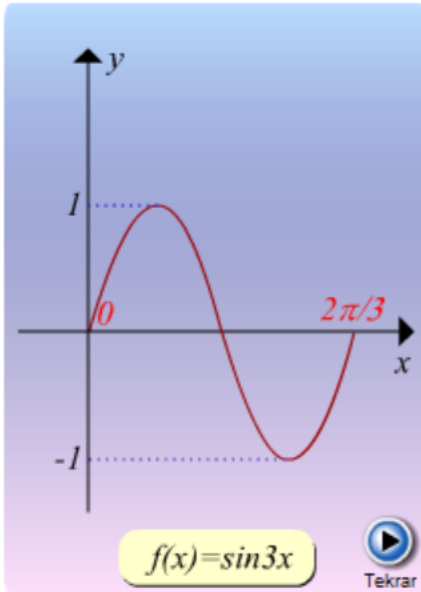
yani ; $T = 2\pi$ dir.



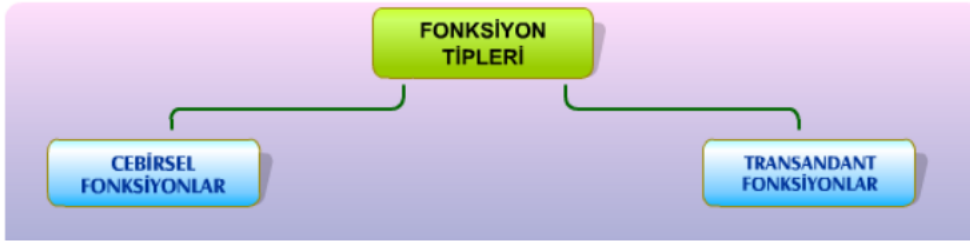
7.2.12 Bileşke Fonksiyon (Fonksiyon Fonksiyonu)

$u = g(x)$ olmak üzere $y = f(u)$ şeklindeki fonksiyonlara **bileşke fonksiyon** denir ve $y = f(g(x))$ şeklinde de gösterilebilir.

Örneğin : $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = 3x$ ise $y = f(g(x)) = \sin(3x) = \sin 3x$ olarak gösterilebilir.



7.3 Fonksiyon Tipleri



7.3.1 Cebirsel Fonksiyonlar

Cebirsel fonksiyonlar 3 başlık altında toplanabilir.



7.3.1.1 Tam Rasyonel Fonksiyonlar (Polinomlar)

$x \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

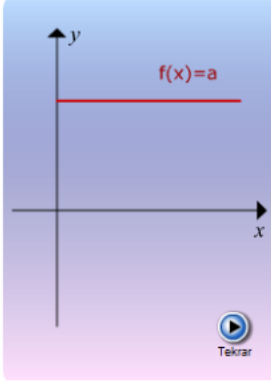
şeklindeki fonksiyonlara **tam rasyonel fonksiyon** denir. Burada $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olup sabit büyüklüklerdir. Bunlara katsayı adı verilir. $n \in \mathbb{N}$ sayısı $a_n \neq 0$ koşuluyla polinomun derecesini belirtir.

Örnek:

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ ikinci dereceden,

$f(x) = x + 3$ birinci dereceden birer tam rasyonel fonksiyondur.

$f(x) = a \cdot x^n$ fonksiyonunda $n = 0$ ise bu fonksiyona **sabit fonksiyon** denir. Bu durumda fonksiyonun $f(x) = a$ olacağı açıktır.



7.3.1.2 Kesirli Rasyonel Fonksiyonlar

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} \dots b_1 x + b_0}$$

Yandaki şekildeki gibi iki tam rasyonel fonksiyonun oranı olarak tanımlanan fonksiyonlara **kesirli rasyonel fonksiyonlar** denir.

Örnek:

Kesirli Rasyonel Fonksiyonlar

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ veya}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 3}$$

7.3.1.3 İrrasyonel Fonksiyonlar

$y=f(x)$ fonksiyonunda değişken kök içinde ise ya da diğer bir ifadeyle değişkene kök alma işlemi de uygulanıyorsa bu fonksiyonlara **irrasyonel fonksiyonlar** denir.

Örnek:

İrrasyonel Fonksiyonlar

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 2x}} \text{ veya}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x + 5}$$

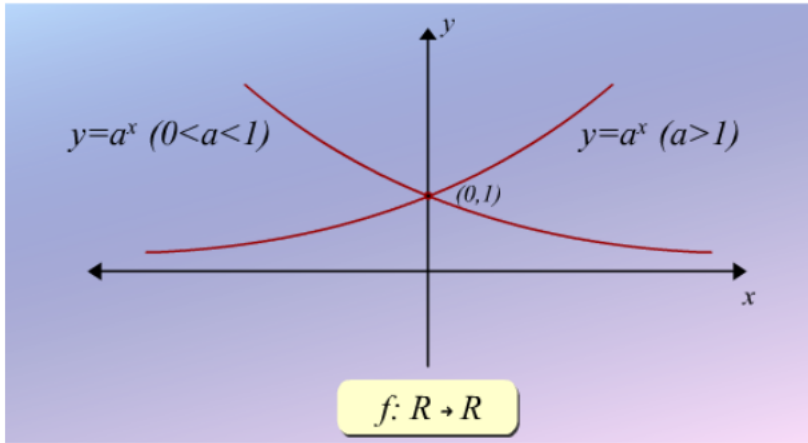
Tekrar

7.3.2 Transandant (Elemantar) Fonksiyonlar



7.3.2.1 Üstel Fonksiyon

$y = a^x$ ($x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$) şeklindeki $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlı fonksiyonlardır.



Özellikleri :

$a > 1$ ise

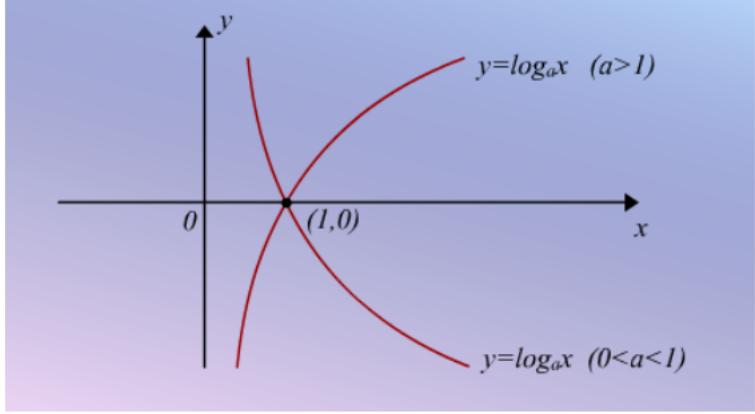
- Fonksiyon sürekli.
- Fonksiyon artandır.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
- $x = 0$ için $y = 1$
- $y = 0$ için $a^x \neq 0$ (x eksenini kesmez)

$0 < a < 1$ ise

- Fonksiyon sürekli.
- Fonksiyon azalandır.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
- $x = 0$ için $y = 1$
- $y = 0$ için $a^x \neq 0$ (x eksenini kesmez)

7.3.2.2 Logaritma Fonksiyonu

$y = \log_a x$ ($x, a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$) şeklinde $(0, +\infty)$ aralığında tanımlı, ters fonksiyonu $x = a^y$ olan fonksiyonlardır.



Özellikleri :

$a > 1$ ise

- Fonksiyon sürekli.
- Fonksiyon artandır.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$
- $y = 0$ için $\log_a x = 0 \Rightarrow a^0 = x \Rightarrow x = 1$ dir.

$0 < a < 1$ ise

- Fonksiyon sürekli.
- Fonksiyon azalandır.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$
- $y = \log_a x = 0 \Rightarrow a^0 = x \Rightarrow x = 1$ dir.

7.3.2.3 Trigonometrik Fonksiyonlar

Trigonometrik Fonksiyonlar 4 başlık altında toplanabilir.

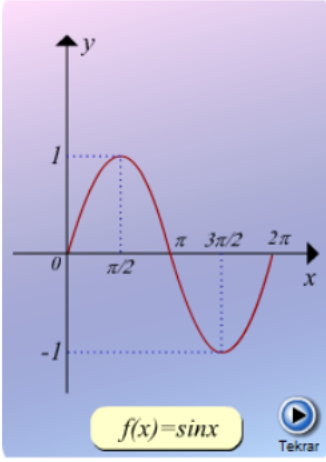


7.3.2.3.1 $y = \sin x$ Fonksiyonu

Özellikleri :

- Fonksiyon sürekli.
- Periyodiktir ($T = 2\pi$)
- Tek fonksiyondur ($f(x) = -f(-x)$)
- Fonksiyon $[-1, +1]$ aralığında değerler alır.

X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0

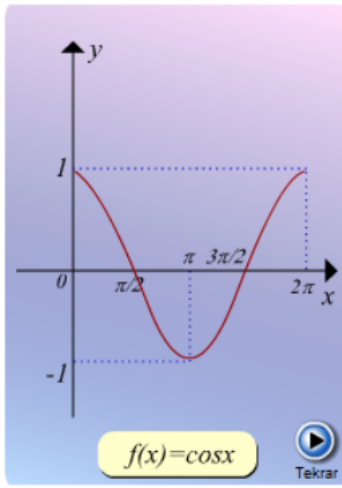


7.3.2.3.2 $y = \cos x$ Fonksiyonu

Özellikleri :

- Fonksiyon sürekli.
- Periyodiktir ($T = 2\pi$)
- Çift fonksiyondur ($f(x) = f(-x)$)
- Fonksiyon $[-1, +1]$ aralığında değerler alır.

X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1

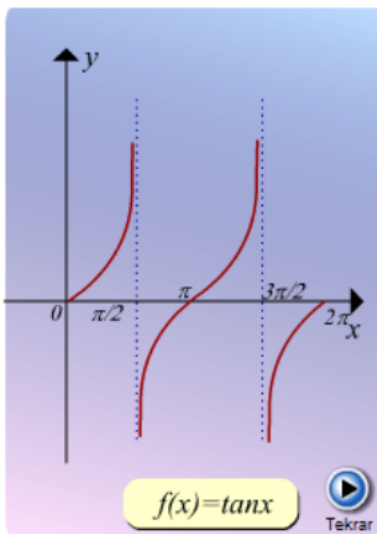


7.3.2.3.3 y = tan x Fonksiyonu

Özellikleri :

- Fonksiyon periyot aralığı içinde $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) için kesiklidir.
- Periyodiktir ($T = \pi$)
- Tek fonksiyondur ($f(x) = -f(-x)$)
- Fonksiyon $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler alır.
- $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ aralığında artandır.

X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
y = tan x	1	$+\infty \parallel -\infty$	0	$+\infty \parallel -\infty$	0

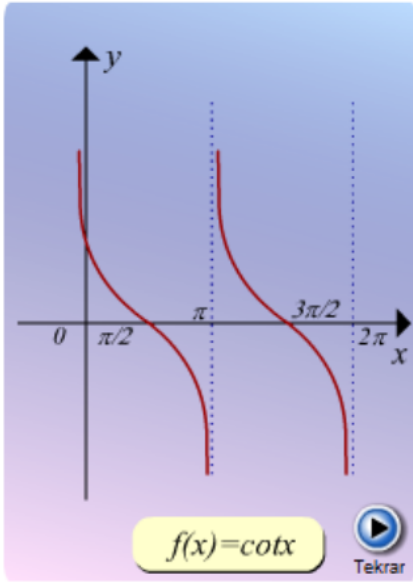


7.3.2.3.4 $y=\cot x$ Fonksiyonu

Özellikleri :

- Fonksiyon bir periyot aralığı içinde $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) için kesiklidir.
- Periyodiktir ($T = \pi$)
- Tek fonksiyondur ($f(x) = -f(-x)$)
- Fonksiyon $(-\infty, +\infty)$ aralığında değerler alır.
- $(0, \pi)$ aralığında azalandır

X	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$y = \cot x$	$-\infty \parallel +\infty$	0	$-\infty \parallel +\infty$	0	$-\infty \parallel +\infty$



7.3.2.4 Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

Trigonometrik fonksiyonlar yardımıyla elde edilen fonksiyonlardır. Örneğin, $y=\sin x$ trigonometrik fonksiyonun ters fonksiyonu $x = \arcsin y$ dir. Bu fonksiyonların grafikleri trigonometrik fonksiyonların $y = x$ doğrusuna göre simetrileri alınarak bulunabilir.

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar, 3 başlık altında toplanabilir.

Ters Trigonometrik Fonksiyonlar

$y=\arcsin x$

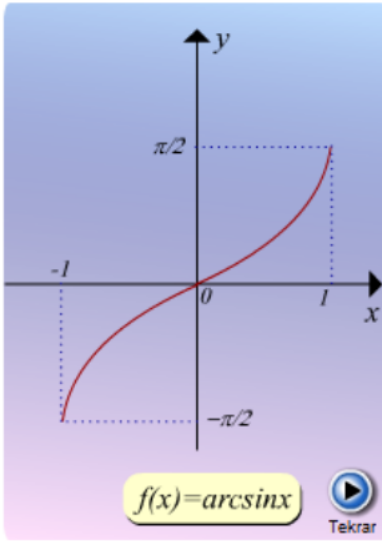
$y=\arccos x$

$y=\arctan x$

7.3.2.4.1 $y = \arcsin x$ Fonksiyonu

Ters fonksiyonu $x = \sin y$ olan fonksiyondur. $x \in [-1, +1]$ ve $y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ aralığında değerler alır. Sürekli ve artan fonksiyondur.

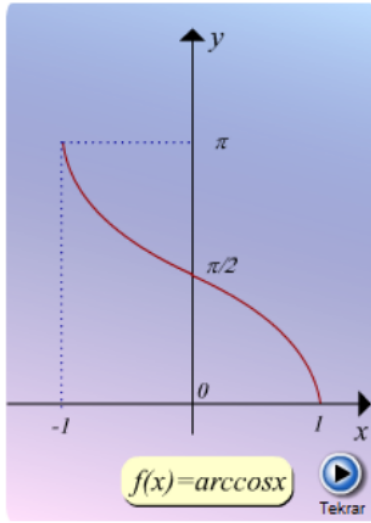
x	-1	0	1
y=arcsinx	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



7.3.2.4.2 $y = \arccos x$ Fonksiyonu

Ters fonksiyonu $x = \cos y$ olan fonksiyondur. $x \in [-1, 1]$ ve $y \in [0, \pi]$ aralığında değerler alır. Sürekli ve azalan bir fonksiyondur.

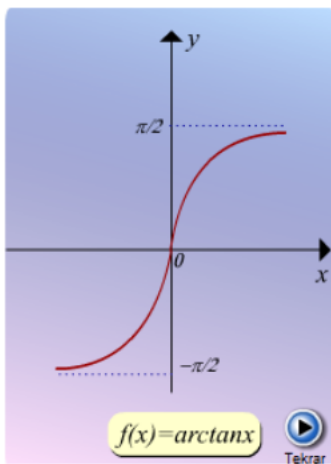
x	-1	0	1
y=arccosx	π	$\frac{\pi}{2}$	0



7.3.2.4.3 $y = \arctan x$ Fonksiyonu

Ters fonksiyonu $x = \tan y$ olan bir fonksiyon olup $x \in (-\infty, +\infty)$ ve $y \in (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$ aralığında değerler alır. Artan bir fonksiyondur.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$y = \arctan x$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$



7.3.2.5 Hiperbolik Fonksiyonlar

e^x ve e^{-x} üstel fonksiyonları yardımıyla tanımlanan sürekli fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

dir. Yukarıda verdiğimiz fonksiyonlar sırası ile; sinüs hiperbolik x , cosinüs hiperbolik x , tanjant hiperbolik x ,kotanjant hiperbolik x diye okunur $\operatorname{sh} x$ ve $\operatorname{ch} x$ bağıntıları taraf tarafa toplanır ve çıkarılırsa

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerin taraf tarafa çarpılmasıyla ;

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntı

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

bağıntısını anımsatmaktadır ve geometrik anlamda benzeri bir yorumu vardır. Bunu şu şekilde açıklayabiliriz : x değiştiği zaman koordinatları

$$X = \cos x, Y = \sin x$$

olan nokta denklemi

$$X^2 + Y^2 = 1$$

dairelerini çizer. Bu bakımdan $\cos x$ ve $\sin x$ fonksiyonlarına dairesel fonksiyonlarda denir. Benzer şekilde , x değiştiğinde koordinatları

$$X = \cosh x, Y = \sinh x$$

olan nokta , denklemi

$$X^2 - Y^2 = 1$$

olan ikizkenar hiperbol üzerinde hareket eder. Yukarıda tanımladığımız fonksiyonlardaki hiperbolik terimi buradan gelmektedir.

Yukarıda verilen formüller yardımıyla;

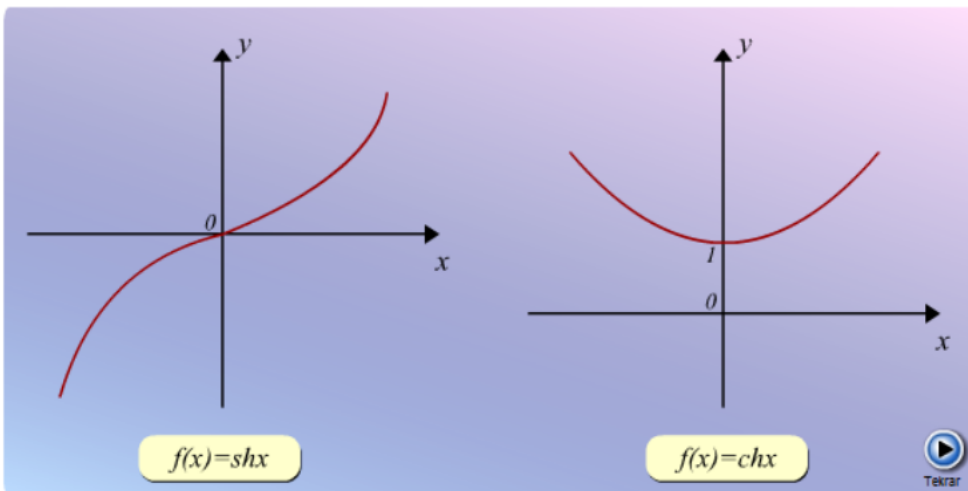
$$\cosh(-x) = \cosh x \text{ ve } \sinh(-x) = -\sinh x$$

olarak elde edilir. Bu nedenle $\cosh x$ fonksiyonu çift fonksiyon, $\sinh x$ ise tek fonksiyondur. x ne olursa olsun, $\cosh x > 0$ dir. Ancak , $\sinh x$ 'in işareti x 'in işareti ile aynıdır, yani $x < 0$ için $\sinh x < 0$, $x > 0$ için $\sinh x > 0$ dir. Özel olarak $\cosh 0 = 1$ ve $\sinh 0 = 0$ dir.

$\sinh x$ daima artan bir fonksiyondur; $\cosh x$ ise $x < 0$ için azalan, $x > 0$ için artan bir fonksiyondur ve $x = 0$ için bir minimumu vardır. Kolayca görüleceği üzere,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cosh x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh x = +\infty$$

Hiperbolik fonksiyonlar periyodik değildir. Bu iki fonksiyonun grafikleri aşağıdaki gibidir.



x	$-\infty$	0	$+\infty$	x	$-\infty$	0	$+\infty$
y = shx	$-\infty$	0	$+\infty$	y = chx	$+\infty$	1	$+\infty$
$\text{th}x = \frac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$							

$\text{th}(-x) = -\text{th} x$ olduğundan $\text{th}x$ tek bir fonksiyondur.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}x = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}x = 1$$

x ne olursa olsun, daima $-1 < \text{th}x < 1$ dir.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y = thx	-1	0	1

