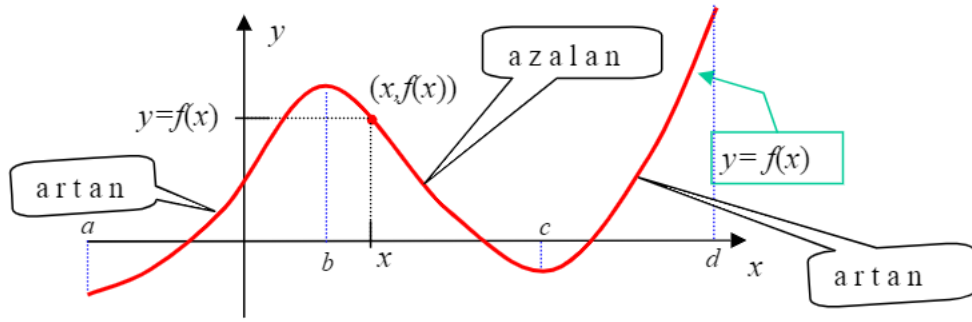


DERS 8

Artan ve Azalan Fonksiyonlar, Konkavlık, Maksimum ve Minimum

8.1. Artan ve Azalan Fonksiyonlar. Bir fonksiyonun veya onun grafiğinin belli bir aralık üzerinde artan veya azalan olmasının ne anlama geldiği aşağıdaki şekilden anlaşılabilir.



Tanım 1. (a, b) aralığında tanımlı bir f fonksiyonu verilmiş olsun. $x_1 < x_2$ olan her $x_1, x_2 \in (a, b)$ için $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonu (a, b) aralığında **artan** fonksiyondur denir. $x_1 < x_2$ olan her $x_1, x_2 \in (a, b)$ için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa, f fonksiyonu (a, b) aralığında **azalan** fonksiyondur denir.

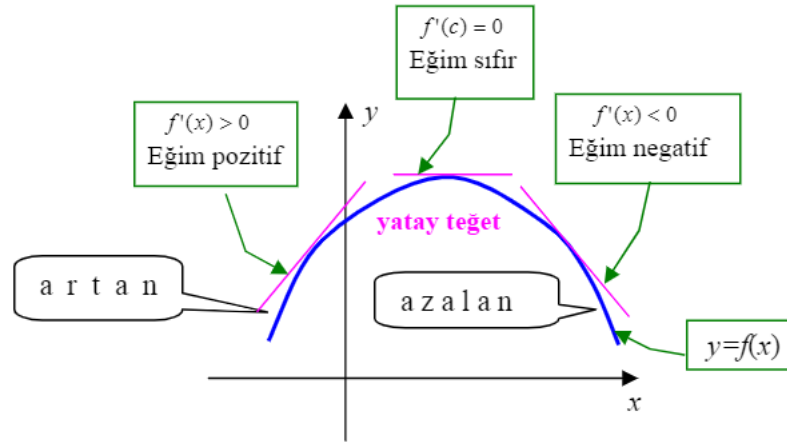
Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu (a, b) aralığında ve (c, d) aralığında artan, (b, c) aralığında azalandır.

Türevli bir fonksiyonun bir aralık üzerinde artan veya azalan olduğu o fonksiyonun türevinin söz konusu aralıktaki aldığı değerlere bakılarak belirlenebilir. Şöyle ki

Teorem 1. $f, [a, b]$ aralığında sürekli ve (a, b) aralığında türevli bir fonksiyon olsun.

- Eğer (a, b) aralığındaki her x için $f'(x) > 0$ ise, f fonksiyonu (a, b) aralığında artan fonksiyondur.
- Eğer (a, b) aralığındaki her x için $f'(x) < 0$ ise, f fonksiyonu (a, b) aralığında azalan fonksiyondur.
- Eğer (a, b) aralığındaki bir c için $f'(c) = 0$ ise, f fonksiyonunun grafiğine $(c, f(c))$ noktasındaki teğet yataydır.

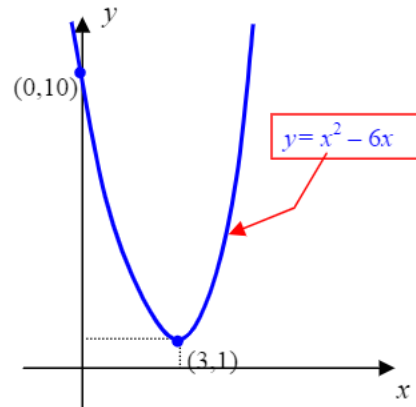
Teorem 1 de ifadesini bulan durumlar aşağıdaki şekil üzerinde özetlenmiştir.



Örnek 1. $f(x) = x^2 - 6x + 10 = (x - 3)^2 + 1$ fonksiyonu için $f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$.

Aşağıdaki tabloda da gösterildiği üzere, $f'(3) = 0$ olup $x < 3$ için $f'(x) < 0$ ve $x > 3$ için $f'(x) > 0$ dır. Dolayısıyla, bu fonksiyon $(-\infty, 3)$ aralığında azalan, $(3, \infty)$ aralığında artandır.

x	$-\infty$	0	3	4	∞
$f'(x)$	-	-6	0	+2	+
	azalan			artan	



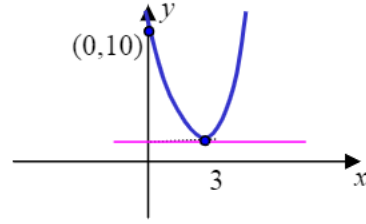
Örnek 2. $f(x) = x^3 + 3x + 4$ fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ aralığında artandır. Çünkü, her x reel sayısı için $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ dır.

8.2. Kritik Değerler. Türevli bir fonksiyonun hangi aralıklar üzerinde artan ve hangi aralıklar üzerinde azalan olduğunu araştırırken o fonksiyonun türevinin hangi aralıklar üzerinde pozitif ve hangi aralıklar üzerinde negatif değerler aldığını belirlemek yeterlidir. Bunun için ise fonksiyonun türevinin sıfır olduğu veya tanımsız olduğu noktalar önem kazanmaktadır.

Tanım. $f(x)$ in tanımlı olduğu; ancak, $f'(x)$ in tanımsız olduğu veya $f'(x) = 0$ olan x değerlerine f fonksiyonunun **kritik değerleri** denir.

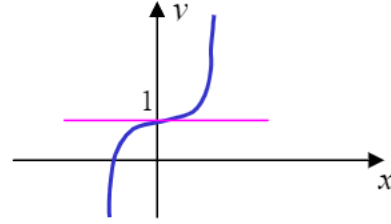
Örnek 1. $f(x) = x^2 - 6x + 10$ un kritik değeri $x = 3$ tür:

$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3.$$



Örnek 2. $f(x) = 1 + x^3$ ün kritik değeri:

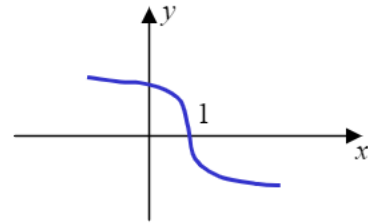
$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$



Örnek 3. $f(x) = (1 - x)^{1/3} = -(x - 1)^{1/3}$ ün kritik değerleri:

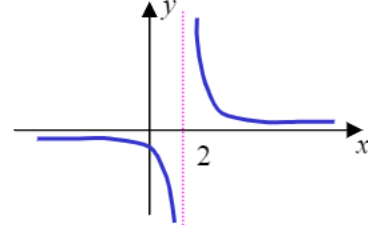
$$f'(x) = \frac{1}{3}(1-x)^{-2/3}(-1) = \frac{-1}{3(x-1)^{2/3}}$$

$f(1)$ tanımlı, $f'(1)$ tanımsız $\Rightarrow x=1$ kritik.



Örnek 4. $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$

$f(2)$ ve $f'(2)$ tanımsız
 \Rightarrow kritik değer yok.

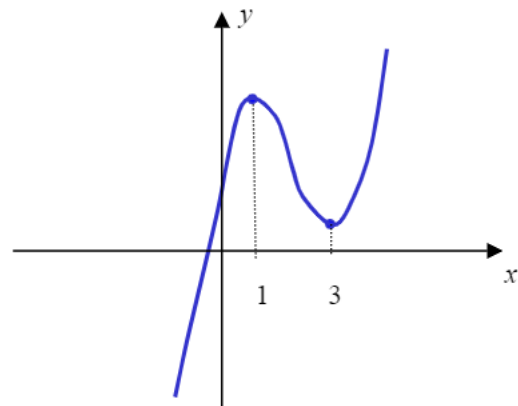


Örnek 5. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ fonksiyonunun tüm kritik değerlerini, artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyelim.

$f(x)$ her x için tanımlı.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ veya } x = 3 \\ \Rightarrow x = 1 \text{ ve } x = 3 \text{ kritik.}$$



x	$-\infty$	0	1	3	∞								
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
	a r t a n					a z a l a n			a r t a n				

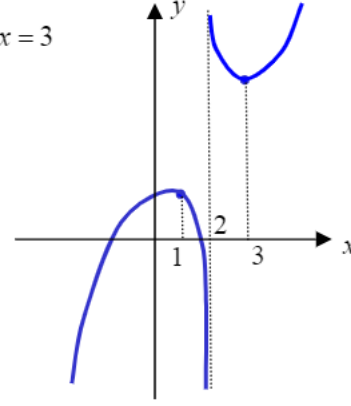
Yukarıda yandaki grafikte gösterildiği üzere, f fonksiyonu $(-\infty, 1)$ ve $(3, \infty)$ aralıklarında artan, $(1, 3)$ aralığında azalandır.

Örnek 6. $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$ fonksiyonunun tüm kritik değerlerini, artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyelim.

$$f'(x) = \frac{2x(x-2) - (x^2 - 3)}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$$

Bu ifadeden f nin kritik değerlerinin $x=1$, $x=2$ ve $x=3$ olduğu, aşağıdaki tablodan da

x	$-\infty$	1	2	3	∞
$x-1$	-----	0	++++	+++++	+++++
$x-3$	-----	-----	-----	0	++++
$(x-2)^2$	+++++	++++	0	++++	+++++
$f'(x)$	+++++	0	-----	++++	+++++
	artan	azalan	azalan	artan	



fonksiyonun $(-\infty, 1)$ ve $(3, \infty)$ aralıkları üzerinde artan, $(1, 2)$ ve $(2, 3)$ aralıkları üzerinde azalan olduğu görülür.

Örnek 7. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 42x^2 - 36x + 15$ fonksiyonunun tüm kritik değerlerini, artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyelim.

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 + 84x - 36 = 12(x^3 - 5x^2 + 7x - 3)$$

Sağ tarafta parantez içindeki ifade (örneğin $x=1$ için bu ifadenin sıfır olduğuna dikkat edilerek) çarpanlara ayrılırsa,

$$f'(x) = 12(x-1)^2(x-3)$$

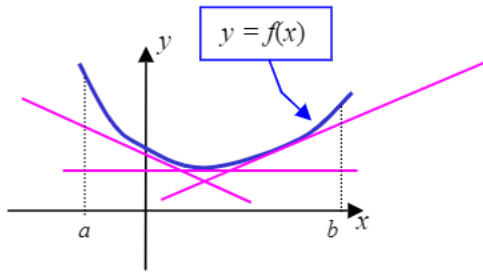
ve böylece, $x=1$ ve $x=3$ ün f nin kritik noktaları olduğu görülür. $f'(x)$ in işareti incelenince

x	$-\infty$	1	3	∞
$f'(x)$	-----	0	0	++++

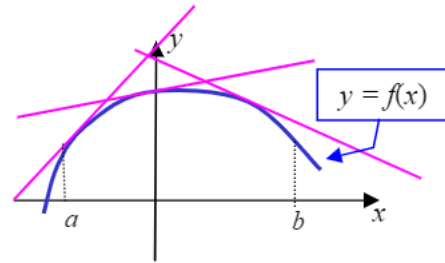
f nin $(-\infty, 3)$ aralığında azalan, $(3, \infty)$ aralığında artan olduğu görülür.

8.3. Konkavlık , İkinci Türev. Bir fonksiyonun grafiğini çizerken fonksiyonun grafiğinin herhangi bir aralık üzerinde artan mı yoksa azalan mı olduğunu bilmek kuşkusuz önemlidir. Bununla beraber, grafiğin eğriliğinin ya da büküklüğünün ne yönde olduğunu bilmek de önemlidir. Eğrilik veya büküklük ile ne söylemek istediğimizi biraz daha açalım.

Tanım 1. (a,b) aralığında tanımlı bir f fonksiyonu ve $c \in (a, b)$ verilmiş olsun. Eğer f nin grafiği, $(c, f(c))$ noktasındaki teğet doğrusunun üstünde kalıyorsa, bu takdirde, $(c, f(c))$ noktasında f nin grafiği **yukarıya doğru konkav** denir. Eğer f nin grafiği, $(c, f(c))$ noktasındaki teğet doğrusunun altında kalıyorsa, bu takdirde, $(c, f(c))$ noktasında f nin grafiği **aşağıya doğru konkav** denir. Eğer (a, b) aralığındaki her c için $(c, f(c))$ noktasında f nin grafiği yukarıya doğru konkav ise, f nin grafiği (a, b) aralığında **yukarıya doğru konkav** denir. Eğer (a, b) aralığındaki her c için $(c, f(c))$ noktasında f nin grafiği aşağıya doğru konkav ise, f nin grafiği (a, b) aralığında **aşağıya doğru konkav** denir.



**(a, b) aralığında
yukarıya doğru konkav**



**(a, b) aralığında
aşağıya doğru konkav**

Yukarıdaki şekillere baktığımız zaman, soldaki şekilde, (a, b) aralığında x büyüdükçe $f'(x)$ in de büyüdüğü; sağdaki şekilde ise x büyüdükçe $f'(x)$ in küçüldüğünü görüyoruz. Demek ki, bir fonksiyonun grafiğinin bir aralık üzerinde yukarıya veya aşağıya doğru konkav olması o fonksiyonun türevinin söz konusu aralıkta artan veya azalan olmasıyla ilişkilidir. Şöyle ki

- Eğer f' fonksiyonu (a, b) aralığında artan ise, f nin grafiği (a, b) aralığında yukarıya doğru konkavdır.
- Eğer f' fonksiyonu (a, b) aralığında azalan ise, f nin grafiği (a, b) aralığında aşağıya doğru konkavdır.

Bir fonksiyonun bir aralık üzerinde artan veya azalan olması o fonksiyonun türevi ile ilişkili olduğundan, bir fonksiyonun grafiğinin konkavlığı belirlenirken o fonksiyonun türevinin türevine bakmak gerekeceği açıktır. Bu düşünce, ikinci türev kavramının tanımına yol açar.

Tanım 2. f fonksiyonunun birinci türevi $f'(x)$ mevcutsa ve $f'(x)$ in de türevi mevcutsa, $f'(x)$ in türevine f nin **ikinci türevi** denir ve $f''(x)$ ile gösterilir.

$y = f(x)$ ise, f nin ikinci türevi

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x))$$

tir ve bu türev

$$f'''(x) = y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

sembolleri ile de gösterilir.

Üçüncü, dördüncü ve daha yüksek mertebeden türevler de benzer şekilde tanımlanabilir.

Bir fonksiyonun yüksek mertebeden türevlerinden söz ederken, o fonksiyonun türevi için **birinci türev** deyimini kullanılır.

Örnek 1. $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2$

Örnek 2. $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$

Örnek 3. $y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{x^3} \Rightarrow y''' = \frac{-6}{x^4}$



Şimdi, yukarıda konkvallıkla ilgili olarak birinci türev cinsinden verilen sonuç, ikinci türev cinsinden şöyle ifade edilebilir.

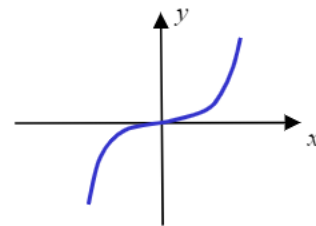
Teorem 1. f , (a, b) aralığında birinci ve ikinci türevi mevcut olan bir fonksiyon olsun.

- Eğer (a, b) aralığındaki her x için $f''(x) > 0$ ise, f nin grafiği (a, b) aralığında yukarıya doğru konkvadır.
- Eğer (a, b) aralığındaki her x için $f''(x) < 0$ ise, f nin grafiği (a, b) aralığında aşağıya doğru konkvadır.

Örnek 4. $f(x) = x^2 - 6x + 10$ fonksiyonu için $f'(x) = 2x - 6$, $f''(x) = 6$ olduğundan, her x reel sayısı için $f''(x) > 0$ dir. Dolayısıyla, bu fonksiyonun grafiği $(-\infty, \infty)$ aralığında yukarıya doğru konkvadır.

Örnek 5. $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinin yukarı ve aşağı doğru konkv olduğu bölgeleri belirleyelim. $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$ tir ve $f''(x)$ in işaret değişimi aşağıdaki tablodan da anlaşılacağı üzere bu fonksiyonun grafiği $(-\infty, 0)$ aralığında aşağıya, $(0, \infty)$ aralığında yukarıya doğru konkvadır.

x	$-\infty$	0	∞
$f''(x)$	- - - - -	0	+ + + + +
			

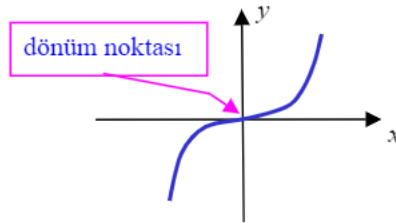


Şimdiye kadar yapılanlardan şu sonucu çıkarabiliriz: Bir f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıklar f nin birinci türevinin; fonksiyonun grafiğinin yukarıya veya aşağıya doğru konkav olduğu aralıklar da f nin ikinci türevinin işaretinin değişimine bakılarak belirlenebilir. Şu kuralları elde ettik:

(a, b) aralığında

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ **artan**
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ **azalan**
- $f'(c) = 0 \Rightarrow (c, f(c))$ de **yatay teğet**
- $f''(x) > 0 \Rightarrow y = f(x)$ in grafiği **yukarı doğru konkav**
- $f''(x) < 0 \Rightarrow y = f(x)$ in grafiği **aşağı doğru konkav**

Tanım 3. Bir f fonksiyonunun grafiğinde konkavlığın değiştiği noktaya f nin **dönüm noktası** denir.



Dönüm noktası ile ikinci türev arasında şu ilişki vardır:

Teorem 2. f fonksiyonu (a, b) de sürekli ve $a < c < b$ olmak üzere, f nin $x = c$ de dönüm noktası varsa, ya $f''(c) = 0$ ya da $f''(c)$ tanımsızdır.

Örnek 6. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ fonksiyonunun tüm kritik değerlerini, artan veya azalan, f nin grafiğinin yukarı doğru veya aşağı doğru konkav olduğu aralıkları, ve varsa dönüm noktalarını belirleyelim.

Fonksiyonun birinci ve ikinci türevlerini bulalım.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ veya } x = 3. \quad \text{Kritik değerler}$$

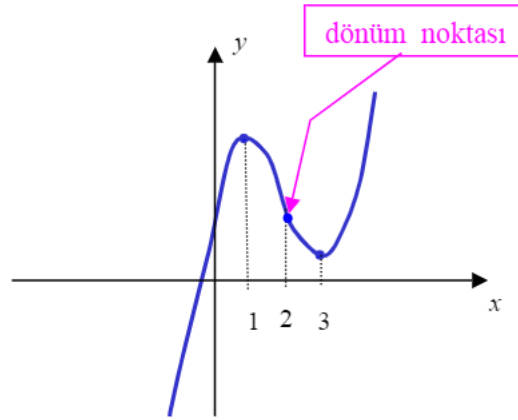
$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$x = 2$ de $f''(x)$ in işareti değiştiğinden, bu noktada konkavlık değişmektedir. Dolayısıyla, $x = 2$ de dönüm noktası vardır.

f fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları ve grafiğin yukarı doğru veya aşağı doğru konkav olduğu bölgeleri, bir tablo üzerinde belirleyebiliriz.

x	$-\infty$	0	1	2	3	∞
$f(x)$		1	5	3	1	
$f'(x)$	+	+	+	+	+	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+

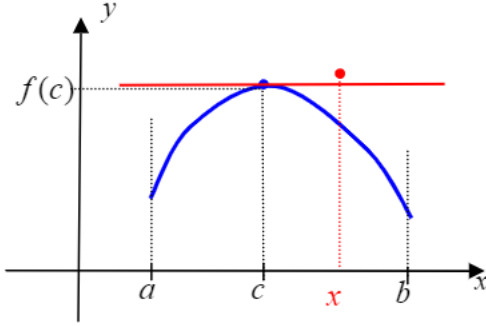
Tablonun ilk satırında fonksiyonun bazı değerleri verilmektedir; ikinci satırda $f'(x)$ in işaretinden fonksiyonun $(-\infty,1)$ ve $(3,\infty)$ aralıklarında artan, $(1,3)$ aralığında azalan olduğunu; üçüncü satırda $f''(x)$ in işaretinden fonksiyonun $(-\infty,2)$ aralığında aşağı doğru, $(2,\infty)$ aralığında yukarı doğru konkav olduğunu görüyoruz. Son satırda bu hususları açıklayıcı çizgiler çizilmiştir. Bu bilgiler ışığında verilen fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibi çizilebilir.



8.4. Yerel Maksimum ve Yerel Minimum. Bir sürekli fonksiyon bir aralığın bir kısmında artan bir kısmında azalan ise, o fonksiyon artan olma durumundan azalan olma durumuna geçerken yerel olarak en yüksek değere ve azalan durumundan artan durumuna geçerken de yerel olarak en küçük değere ulaşacaktır. Bu tür değerlere **yerel ekstremum** değerleri, bunlardan yerel olarak en büyük olan(lar)a **yerel maksimum** ve yerel olarak en küçük olan(lar)a da **yerel minimum** değer(ler) denir.

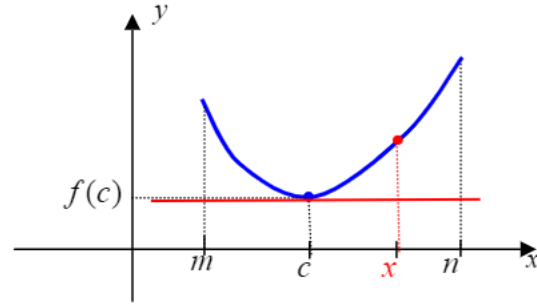
Tanım 1. f , $c \in \mathbf{R}$ de tanımlı bir fonksiyon olsun. $c \in (a,b)$ olan ve her $x \in (a,b)$ için $f(x) < f(c)$ koşulunu sağlayan bir (a,b) aralığı varsa, $f(c)$ değeri f nin bir **yerel maksimum değeridir** denir. Benzer şekilde, $c \in (a,b)$ olan ve her $x \in (a,b)$ için $f(x) > f(c)$ koşulunu sağlayan bir (a,b) aralığı varsa, $f(c)$ değeri f nin bir **yerel minimum değeridir** denir.

Aşağıdaki şekiller bu tanımlar için açıklayıcı olacaktır.



$$a < x < b \Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

($f(c)$ yerel maksimum)

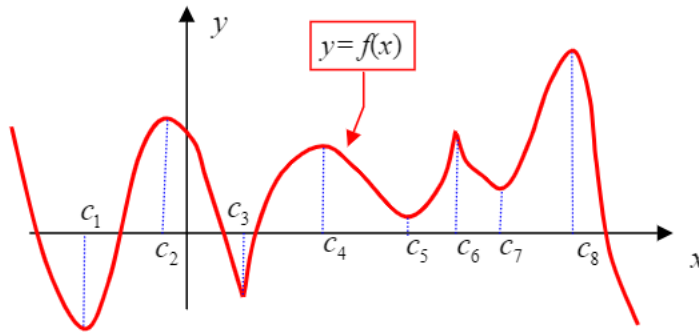


$$a < x < b \Rightarrow f(x) \geq f(c)$$

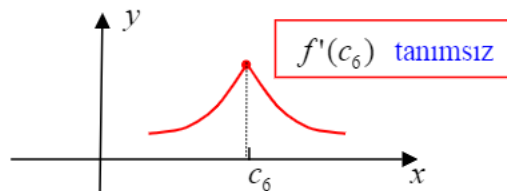
($f(c)$ yerel minimum)

$f(c)$ değeri f nin yerel maksimum (veya yerel minimum) değeri ise, f nin $x = c$ de **yerel maksimum (veya yerel minimum) değeri vardır** denir.

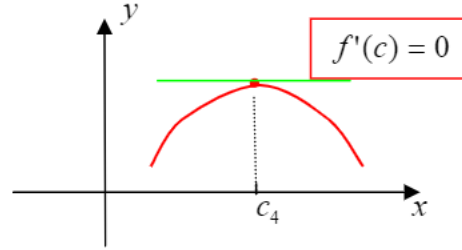
Bir fonksiyonun bir yerel maksimum değeri belli bir aralık üzerinde fonksiyonun aldığı en büyük değer, yerel minimum değeri de belli bir aralık üzerinde aldığı en küçük değerdir. Dolayısıyla, bir fonksiyonun birden çok yerel maksimum veya yerel minimum değerleri bulunabilir.



Yukarıda grafiği verilen f fonksiyonu için $f(c_2)$, $f(c_4)$, $f(c_6)$, $f(c_8)$ değerleri yerel maksimum, $f(c_1)$, $f(c_3)$, $f(c_5)$, $f(c_7)$ değerleri de yerel minimum değerleridir. Bu grafikte, iki tür yerel maksimum değer bulunduğuna dikkat ediniz. Örneğin, $f(c_6)$ yerel maksimum değerini göz önüne alırsak, fonksiyonun c_6 civarındaki grafiği aşağıdaki gibi olup $f'(c_6)$ tanımsızdır (Bu noktada, grafiğe sonsuz çoklukta teğet çizilebileceğine dikkat ediniz).



Diğer yerel maksimum değerler, örneğin $f(c_4)$ için fonksiyonun c_4 civarındaki grafiği aşağıdaki gibi olup $(c_4, f(c_4))$ noktasında yatay teğet vardır; başka bir ifade ile, $f'(c_4) = 0$ dır.



Grafikte yerel minimum değerlere karşılık gelen noktalara bakıldığında aynı durum gözlemlenecektir. Gerçekten, bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum değerleri ile ilgili olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 1. Bir f fonksiyonu (a, b) aralığında sürekli ve $c \in (a, b)$ için $f(c)$ yerel maksimum veya yerel minimum ise, c , f nin bir kritik değeridir (yani, $f'(c) = 0$ veya $f'(c)$ tanımsızdır).

Bir fonksiyonun bazı kritik değerleri yerel maksimum veya yerel minimum değerlere yol açmayabilirler. Örneğin, $x = 0$ değeri $f(x) = x^3$ küp fonksiyonu için bir kritik değerdir fakat $f(0) = 0$ değeri küp fonksiyonunun ne yerel maksimum ne de yerel minimum değeridir.

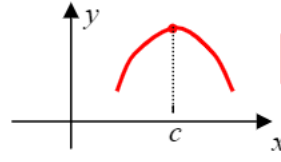
c , f nin kritik değeri ise, $f(c)$ nin yerel ekstremum olma durumu $f'(x)$ in c civarında işareti incelenerek belirlenebilir.

Teorem 2(Birinci Türev Testi). $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli bir f fonksiyonu verilmiş olsun ve $c \in (a, b)$, f nin bir kritik değeri olsun. Ayrıca, f fonksiyonunun (a, b) aralığının belki c hariç her noktasında türevli olduğunu kabul edelim. Bu takdirde,

- Eğer her $x \in (a, c)$ için $f'(x) > 0$ ve her $x \in (c, b)$ için $f'(x) < 0$ ise, $f(c)$, f nin bir yerel maksimum değeridir.
- Eğer her $x \in (a, c)$ için $f'(x) < 0$ ve her $x \in (c, b)$ için $f'(x) > 0$ ise, $f(c)$, f nin bir yerel minimum değeridir.
- Eğer her $x \in (a, b)$ için $f'(x) > 0$ veya her $x \in (a, b)$ için $f'(x) < 0$ ise, $f(c)$, f nin bir yerel maksimum veya yerel minimum değeri değildir.

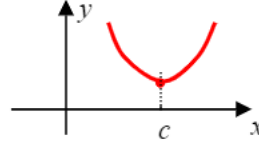
Birinci Türev Testinde söz konusu edilen durumlar aşağıda gösterilmiştir:

x	a	c	b
$f'(x)$	+	+	-



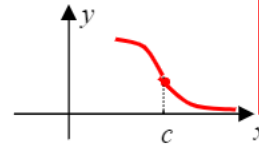
yerel maksimum

x	a	c	b
$f'(x)$	-	+	+



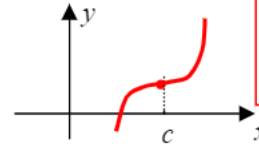
yerel minimum

x	a	c	b
$f'(x)$	-	-	-



$f'(c)$ tanımsız;
yerel maks. veya
yerel min. yok

x	a	c	b
$f'(x)$	+	+	+



$f'(c) = 0$
yerel maks. veya
yerel min. yok

Örnek 1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ fonksiyonunun kritik değerlerini daha önce bulmuştuk.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ veya } x = 3.$$

$f'(x)$ in işareti incelenince

x	$-\infty$	1	3	∞	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

$x = 1$ de yerel maksimum ($f(1) = 5$) ve $x = 3$ de yerel minimum ($f(3) = 1$) değeri bulunduğu görülür.

Örnek 2. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 42x^2 - 36x + 15$ fonksiyonunun kritik değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} f'(x) = 12x^3 - 60x^2 + 84x - 36 = 0 &\Rightarrow 12(x^3 - 5x^2 + 7x - 3) = 0 \\ &\Rightarrow (x-1)^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3. \end{aligned}$$

Bu örneğimizde de kritik değerlerin $x = 1$ ve $x = 3$ olduğunu görüyoruz. $f'(x)$ in işareti incelenince

x	$-\infty$	1	3	∞
$f'(x)$	-	0	0	+

sadece $x = 3$ te yerel minimum($f(3) = -12$) bulunduğu, $x = 1$ de ne yerel maksimum ne de yerel minimum($f(1) = 4$) bulunduğu görülür.

$f'(c) = 0$ olan bir kritik değerin yerel maksimum veya yerel minimum durumu $f''(c)$ nin o değerdeki işaretiyle de belirlenir:

Teorem 3(İkinci Türev Testi). f , (a, b) aralığında türevli bir fonksiyon ve $c \in (a, b)$ için $f'(c) = 0$ olsun.

- Eğer $f''(c) < 0$ ise, f nin $x = c$ de yerel maksimum değeri vardır.
- Eğer $f''(c) > 0$ ise, f nin $x = c$ de yerel minimum değeri vardır.

Yukarıdaki örneklerde bulunan kritik değerler için ikinci türev testini uygulayarak da sonuca gidebiliriz:

Örnek 3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ in kritik değerlerini Örnek 1 de bulmuştuk: $x = 1$ ve $x = 3$. Şimdi bu kritik değerler için ikinci türev testini uygulayalım.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12$$

$$\Rightarrow f''(1) = -6 \text{ ve } f''(3) = 6$$

$f''(1) < 0$ ve $f''(3) > 0$ olduğundan, $f(1) = 5$ yerel maksimum ve $f(3) = 1$ yerel minimumdur.

Örnek 4. $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 42x^2 - 36x + 15$ fonksiyonunun kritik değerlerini Örnek 2 de bulmuştuk: $x = 1$ ve $x = 3$. Şimdi bu kritik değerler için ikinci türev testini uygulayalım.

$$f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 42x^2 - 36x + 15 \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 60x^2 + 84x - 36 \Rightarrow f''(x) = 36x^2 - 120x + 84$$

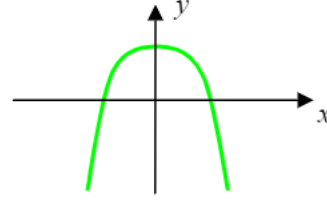
$$\Rightarrow f''(1) = 0 \text{ ve } f''(3) = 48$$

$f''(3) = 48 > 0$ olduğundan, $f(3) = -12$ yerel minimumdur. $f''(1) = 0$ olduğundan, $x = 1$ kritik noktası için ikinci türev testi ile herhangi bir şey söylenemez. Ancak, birinci türev testinden biliyoruz ki $f(1) = 4$ ne yerel maksimum ne de yerel minimumdur.

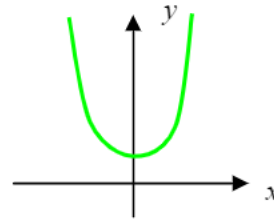
$f'(c) = 0$ ve $f''(c) = 0$ olduğunda ikinci türev testinden $x = c$ kritik değerinin yerel maksimum veya yerel minimum olup olmadığı konusunda bir şey söylenemeyeceğini unutmamalıyız. Bu durumda, birinci türev testi veya tanımlar kullanılır.

8.6. Mutlak Maksimum ve Mutlak Minimum. Bir fonksiyonun tanım kümesinde aldığı değerlerden en büyüğü varsa, o en büyük değere fonksiyonun **mutlak maksimum** değeri denir. Eğer fonksiyonun tanım kümesinde aldığı değerlerden en küçüğü varsa, o en küçük değere fonksiyonun **mutlak minimum** değeri denir.

Örnek 1. $f(x) = 1 - x^2$ fonksiyonunun mutlak maksimum değeri $f(0) = 1$ dir. Bu fonksiyonun mutlak minimum değeri yoktur.

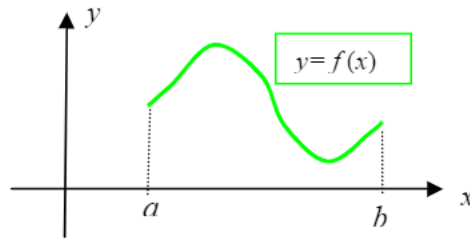


Örnek 2. $f(x) = 1 + x^2$ fonksiyonunun mutlak minimum değeri $f(0) = 1$ dir. Bu fonksiyonun mutlak maksimum değeri yoktur.



Bir fonksiyonun bir aralık üzerinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerinden söz edilebileceği açıktır. Bu bağlamda aşağıdaki sonuç önemlidir.

Teorem 1. f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ise, f bu aralıkta mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlere sahiptir.



Şekilden de görüldüğü üzere, teoremden ifade edilen sonuç sağduyusal olarak aşikârdır. $[a, b]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonunun grafiği olan eğrinin en aşağıda ve en yukarıda noktaları vardır.

$[a, b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonunun bu aralıktaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri ya f nin (a, b) aralığındaki kritik noktalarında ya da $[a, b]$ aralığının uç noktalarında ($x = a$ ve $x = b$ de) ortaya çıkar.

Örnek 3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ denklemi ile verilen f fonksiyonunun aşağıdaki aralıklardan her birinde mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulalım:

- a) $[0, 2]$ b) $[\frac{1}{2}, 2]$ c) $[\frac{1}{2}, 4]$ ç) $[2, 4]$

Çözüm. 8.3 te, Örnek 6 da ele almış olduğumuz bu fonksiyonun kritik noktaları $x = 1$ ve $x = 3$ tür. Her bir aralıktaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri şöyle belirlenir.

a) $[0,2]$ aralığında sadece $x = 1$ kritik noktası vardır ve

$$f(0)=1, \quad f(1)=5, \quad f(2)=3$$

değerlerinden $f(0)=1$ değeri f nin bu aralıktaki mutlak minimum değeri, $f(1)=5$ değeri de mutlak maksimum değeridir.

b) $[\frac{1}{2},2]$ aralığında da sadece $x = 1$ kritik noktası vardır ve

$$f(\frac{1}{2})=\frac{33}{8}, \quad f(1)=5, \quad f(2)=3$$

değerlerinden $f(2)=3$ değeri f nin bu aralıktaki mutlak minimum değeri, $f(1)=5$ değeri de mutlak maksimum değeridir.

c) $[\frac{1}{2},4]$ aralığı $x = 1$ ve $x = 3$ kritik noktalarından her ikisini de içermektedir ve

$$f(\frac{1}{2})=\frac{33}{8}, \quad f(1)=5, \quad f(3)=1, \quad f(4)=5$$

değerlerinden $f(3)=1$ değeri f nin bu aralıktaki mutlak minimum değeri, $f(1)=f(4)=5$ değeri de mutlak maksimum değeridir.

ç) $[2,4]$ aralığında sadece $x = 3$ kritik noktası vardır ve

$$f(2)=3, \quad f(3)=1, \quad f(4)=5$$

değerlerinden $f(3)=1$ değeri f nin bu aralıktaki mutlak minimum değeri, $f(4)=5$ değeri de mutlak maksimum değeridir.

Örnek 4. Tenis raketi üreten bir firmanın, günde x adet tenis raketi üretmesi durumunda, toplam gider fonksiyonu $Gi(x) = 4200 + 84x$ ve fiyat talep fonksiyonu $p = 192 - 0.01x^2$, $0 \leq x \leq 100$, birim para olarak veriliyor.

a) Maksimum geliri bulunuz.

b) Maksimum kârı ve bu kârın gerçekleşmesi için her bir raketin kaçta satılması gerektiğini bulunuz.

Çözüm. a) Gelir fonksiyonu, $Ge(x) = x \cdot p(x) = 192x - 0.01x^3$, $20 \leq x \leq 100$ olarak elde edilir. Kritik değerlere bakalım:

$$Ge'(x) = 192 - 0.03x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 19200 \Rightarrow x^2 = 6400 \Rightarrow x = 80$$

ve $Ge(20) = 3760$, $Ge(80) = 14840$, $Ge(100) = 9200$ olduğundan maksimum gelir 80 raket üretildiği zaman $Ge(80) = 14840$ olarak gerçekleşir.

b) Kâr fonksiyonu, $K(x) = Ge(x) - Gi(x) = -4200 + 108x - 0.01x^3$, $20 \leq x \leq 100$ olarak elde edilir. Kritik değerlere bakıyoruz:

$$K'(x) = 108 - 0.03x^2 \Rightarrow 3x^2 = 10800 \Rightarrow x^2 = 3600 \Rightarrow x = 60$$

ve $K(20) = 1280$, $K(60) = 3520$, $K(100) = 0$ olduğundan maksimum kâr 60 raket üretildiği zaman $K(60) = 3520$ olarak gerçekleşir.

Örnek 5. Bir firma, en az 10 bin en çok 20 bin YTL harcamayı planladığı bir reklam kampanyası düzenlemek istiyor. Firma, geçmiş satış bilgilerini de kullanarak, bu kampanya için x bin YTL harcarsa, günde satabileceği ürün sayısının $N(x) = 9000 - 600x + 45x^2 - x^3$ olacağını tahmin ediyor.

a) Reklam harcamaları arttıkça satışın da artacağını gösteriniz.

b) Satışın reklam harcamalarına göre değişim oranını analiz ediniz. Bu oran hangi aralıklarda artmakta, hangi aralıklarda azalmaktadır? En yüksek değişim oranı nedir?

c) N ve onun türevi N' nün grafiğini aynı koordinat düzleminde çizerek bulduğunuz sonuçları grafik üzerinde yorumlayınız.

Çözüm. **a)** Satış sayısını veren N fonksiyonunun türevi

$$N'(x) = -600 + 90x - 3x^2 = -3(x^2 - 30x + 200) = -3(x-10)(x-20)$$

dir ve $10 < x < 20$ için $N'(x) > 0$ dır. Dolayısıyla, N fonksiyonu $(10,20)$ aralığında artan bir fonksiyondur. Başka bir ifadeyle, reklam harcamaları x arttıkça satış sayısı $N(x)$ de artar.

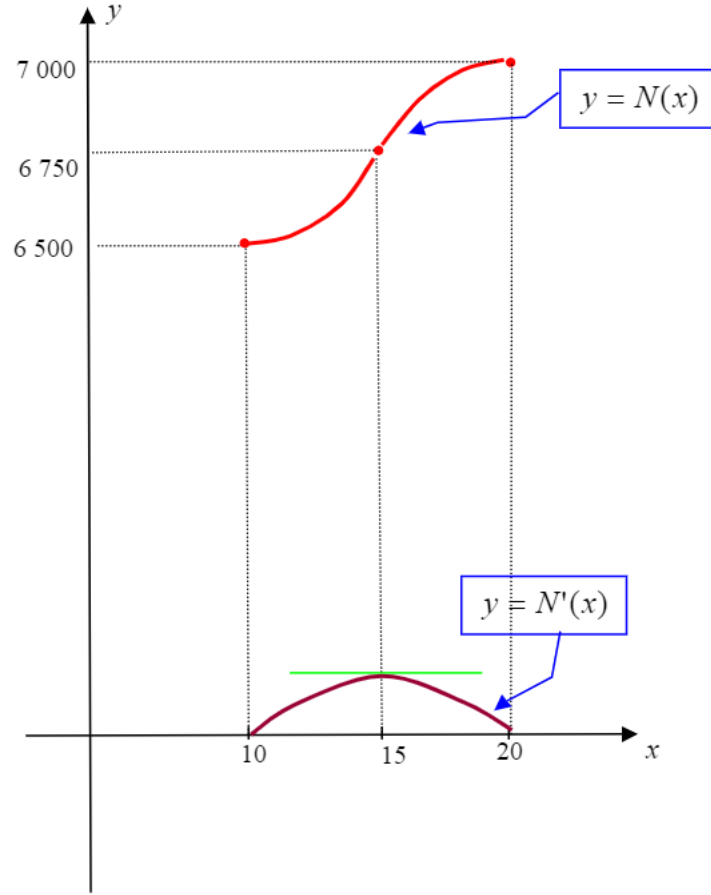
b) Değişim oranı türeve karşılık geldiğinden, satışın reklam harcamalarına göre değişim oranı $N'(x)$ tir. Bu oranın hangi aralıklarda artan hangi aralıklarda azalan olduğunu anlamak için N' nün türevine yani N nin ikinci türevine bakmalıyız: $N''(x) = -6x + 90 = -6(x-15)$.

$N'(x)$ ve $N''(x)$ in işaretlerini aynı tablo üzerinde inceleyelim.

x	10	15	20
$N(x)$	6 500	6 750	7 000
$N'(x)$	0 + + + + + + +	75 + + + + + + +	0
$N''(x)$	+ + + + + + + +	0 - - - - - - - -	-

Satışın reklam harcamalarına göre değişim oranını veren N' fonksiyonu, $(10, 15)$ aralığında artan, $(15, 20)$ aralığında azalandır. Başka bir deyimle, satış, reklam harcamalarına göre 10 bin YTL den 15 bin YTL ye kadar olan harcamalar için artan bir oranda, 15 bin YTL den 20 bin YTL ye kadar olan harcamalar için azalan bir oranda artar. Satışın reklam harcamalarına göre en yüksek artış oranı 15 bin YTL lik harcamada gerçekleşir. Bu noktadan sonra satışın reklam harcamalarına göre artış oranı azalmaya başlar.

Tablodan yararlanarak N ve N' nün grafiğini aynı düzlemde çiziyoruz.

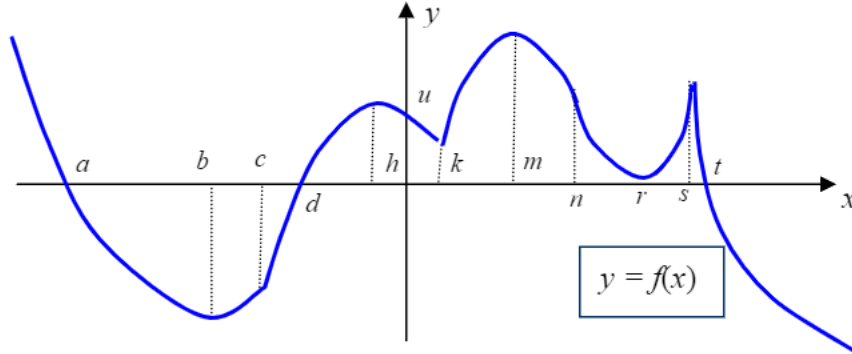


Grafikten görüldüğü üzere, N fonksiyonu $(10, 20)$ aralığında artan olup, $(10, 15)$ aralığında yukarıya doğru, $(15, 20)$ aralığında aşağıya doğru konkavdır, $x = 15$ te dönüm noktası vardır.

N' nün de $(10, 15)$ aralığında artan, $(15, 20)$ aralığında azalan olduğu ve en yüksek değerini $x = 15$ te aldığı görülmektedir.

Problemler 8

1. $y = f(x)$ in grafiği aşağıda verilmiştir. Grafikten yararlanarak izleyen soruları yanıtlayınız.



- Koordinat kesişimlerini bulunuz.
 - $y = f(x)$ in grafiği hangi aralıklar üzerinde artan, hangi aralıklar üzerinde azalandır?
 - Hangi aralıklar üzerinde $f'(x) < 0$ dır? Hangi aralıklar üzerinde $f'(x) > 0$ dır?
 - $y = f(x)$ in grafiği hangi aralıklar üzerinde yukarı doğru, hangi aralıklar üzerinde aşağı doğru konkavdır?
 - Hangi aralıklar üzerinde $f''(x) < 0$ dır? Hangi aralıklar üzerinde $f''(x) > 0$ dır?
 - f nin dönüm noktalarının x – koordinatlarını bulunuz.
 - f nin yerel maksimum ve yerel minimumlarının apsilerini bulunuz.
2. $f'(x)$ in işaret tablosu aşağıdaki gibi ise, f nin artan ve azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

x	$-\infty$	a	b	c	∞
$f'(x)$	$++$	0	$----$	$----$	$0+++$

3. Aşağıdaki fonksiyonlardan her birinin kritik noktalarını, artan veya azalan olduğu aralıkları belirleyiniz.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ b) $f(x) = x^3 - 6x$ c) $f(x) = 24x^2 - x^3$ d) $f(x) = x^4 - 12x^3$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$ f) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ g) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ h) $f(x) = x + \frac{4}{x}$

4. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ b) $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 5x - 7$ c) $f(x) = -x^3 + 24x^2 - 3x - 2$

d) $f(x) = x^{-3} - 6x^{-2}$ e) $f(x) = x^3 - 6x^{1/2} + 5x^{1/3}$ f) $f(x) = (-x^3 + 24x^2 - 3x - 2)^3$

5. $f''(x)$ in işaret tablosu aşağıdaki gibi ise, f nin yukarıya ve aşağıya doğru konkav olduğu aralıkları belirleyiniz.

x	$-\infty$	a	b	c	∞											
$f''(x)$	-	-	0	+	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	+

6. Aşağıdaki fonksiyonlardan her birinin yukarıya veya aşağıya doğru konkav olduğu aralıkları ve varsa dönüm noktalarını belirleyiniz.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} f(x) = x^2 - 4x + 5 & \text{b)} f(x) = x^3 - 6x & \text{c)} f(x) = 24x^2 - x^3 & \text{ç)} f(x) = x^4 - 12x^3 \\ \text{d)} } f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{e)} } f(x) = \frac{e^x}{x} & \text{f)} } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} & \text{g)} } f(x) = x + \frac{4}{x} \end{array}$$

7. Önceki alıştırmadaki fonksiyonlardan her birinin yerel maksimum, yerel minimum, mutlak maksimum, mutlak minimum değerlerini (varsa) belirleyiniz.

8. Aşağıdaki fonksiyonlardan her birinin sırasıyla, $[-4, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 4]$ ve $[-1, 20]$ aralıklarında mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

$$\text{a)} f(x) = x^2 - 4x + 5 \quad \text{b)} f(x) = x^3 - 6x \quad \text{c)} f(x) = 24x^2 - x^3 \quad \text{ç)} f(x) = x^4 - 12x^3$$

9. Kar gözlüğü üreten bir firmanın, günde x adet kar gözlüğü üretmesi durumunda, toplam gider fonksiyonu $Gi(x) = 500 + 2x$ ve fiyat talep fonksiyonu $p = 10 - 0.001x$, $0 \leq x \leq 10000$, birim para olarak veriliyor.

- a) Maksimum geliri bulunuz.
- b) Maksimum kârı ve bu kârın gerçekleşmesi için her bir gözlüğün kaçta satılması gerektiğini bulunuz.

10. Bir tür üründen en çok 300 adet üretilip satan bir firma bu üründen x adet üretilip piyasaya sürmesi durumunda fiyat fonksiyonunun $p(x) = 1200 - 0.01x^2$ ve gider fonksiyonunun da $Gi(x) = 10000 + 525x$ YTL olacağını belirliyor.

- a) Tanım kümesini de belirterek gelir fonksiyonunu, bu fonksiyonun artan veya azalan olduğu, yukarıya veya aşağıya doğru konkav olduğu aralıkları, mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.
- b) Tanım kümesini de belirterek kâr fonksiyonunu, bu fonksiyonun artan veya azalan olduğu, yukarıya veya aşağıya doğru konkav olduğu aralıkları, mutlak maksimum değerini bulunuz.

11. Bir firma, en az 10 bin en çok 40 bin YTL harcamayı planladığı bir reklam kampanyası düzenlemek istiyor. Geçmiş satış bilgilerini de kullanarak, bu kampanya için x bin YTL harcarsa, günde satabileceği ürün sayısının $N(x) = 16000 - 1200x + 75x^2 - x^3$ olacağını tahmin ediyor.

- a) N fonksiyonunun sözü edilen harcama aralığında artan olduğunu gösteriniz.
- b) Satışın reklam harcamalarına göre değişim oranını olan $N'(x)$ in ne zaman artan ne zaman azalan olduğunu belirleyiniz. En yüksek değişim oranı nedir?
- c) N fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.
- ç) N ve onun türevi N' nün grafiğini aynı koordinat düzleminde çizerek bulduğunuz sonuçları grafik üzerinde yorumlayınız.

12. Ateşi olan bir hastaya bir ateş düşürücü ilaçtan en çok 6 miligram verilerek hastanın ateşi düşürülmeğe çalışılıyor. Hastaya x miligram ilaç verildikten 1 saat sonra, hastanın vücut sıcaklığı

$$T(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{27}x^3 \text{ derece düşüyor.}$$

- a) T fonksiyonunun, $[0, 6]$ tanım aralığında, artan olduğunu gösteriniz.
- b) $T'(x)$ in ne zaman artan ne zaman azalan olduğunu belirleyiniz. $T'(x)$ in en yüksek değeri nedir?
- c) T fonksiyonunun dönüm noktasını bulunuz.
- ç) T ve onun türevi T' nün grafiğini aynı koordinat düzleminde çizerek bulduğunuz sonuçları grafik üzerinde yorumlayınız.