Fırsatlar Sunar

Temel Kavramlar, Dif Denk. Tanımı ve Çözümleri

İçinde bilinmeyen bulunan ve özdeşlik olmayan eşitliklere **denklem** denir.

Tanım 1.1. Tek bir değişkene bağlı bir fonksiyonun bu değişkene göre türevlerinden oluşan denkleme **adi (bayağı) diferansiyel denklem** denir. Adi diferansiyel denklemler genel olarak

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

şeklinde gösterilir. Burada $y = y(x)$ olup x bağımsız değişken, y bağımlı değişkendir. Ayrıca $y' = \dfrac{dy}{dx}, y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$ dir.

Örnek: $y'' - 3xy' = 1$, $y^{(n)} = 0$, $x^n (y')^2 = \sin x + y$ her biri birer diferansiyel denklemdir.

$e^x + y = x^2 - 1$ diferansiyel denklem değildir.

Tanım 1.2. İki yada daha fazla değişkene bağlı bir fonksiyonun bu değişkenlere göre türevlerini içeren denkleme **kısmi diferansiyel denklem** denir. İki bağımsız değişkene ve bir bağımlı değişkene bağlı bir kısmi diferansiyel denklem genel olarak

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right) = 0$$

şeklinde gösterilir. Burada $z = z(x, y)$ olup x ve y bağımsız, z bağımlı değişkendir.

Örnek: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ her biri kısmi diferansiyel denklemdir.

4

Tanım: Bir diferansiyel denklemdeki en yüksek türevin mertebesine dif. denklemin mertebesi; bir dif. denklem türevlere göre polinom şeklinde yazıldığında en yüksek türevin derecesine dif. denk. derecesi denir.

Örnek: Aşağıdaki dif. denklemlerin mertebe ve derecelerini bulalım.

a) $y''' + (y'')^2 + x(y')^3 = x - 1$

b) $\sqrt{y'} = x + y^2$, c) $e^{y'} = \cos y' + x^2 + y^2$

Çözüm: a) mertebe 3 ve derece ise 1 dir.

5

b) Öncelikle denklem türeve göre polinom şeklinde yazılırsa $y' = (x+y^2)^2$ olur. Bu durumda mertebe 1 ve derecede 1 olur.

c) Denklemin mertebesinin 1 olduğu açıktır. Ancak bu denklem türevlere göre polinom şeklinde yazılamadığından dereceden söz etmek mümkün değildir. Yani derecesi yoktur.

Sonuç: Bir dif. denklemin kesinlikle mertebesi vardır. Ancak derecesinin olması gerekmez.

6

Şimdide dif denklemin çözümleri hakkında bilgi verelim.

Tanım: Bir $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (1) dif. denklemi ve $\mathbb{R}$de ~~ta~~ veya $a<x<b$ aralığında tanımlı bir

$$y = F(x) \quad (2)$$

fonksiyonu verilsin. Eğer (1) dif. denkleminde y ve y-nin türevleri yerine (2) deki F(x) ve F(x) in türevleri yazıldığında (1) denklemi özdeş olarak sağlanıyorsa (2) ye (1) in bir çözümü denir. Dolayısıyla dif. denklemin çözümü varsa sonsuz sayıda yani çoktur.

7

(2) nin xy koordinat sistemindeki grafiğine ise (1) dif. denklemin integral eğrisi denir.
Sonuç olarak, bir dif. denklemin çözümleri birer fonksiyon belirtir, bunların grafikleri ise eğri belirtir.

Örnek: $y'-2y=0$ denklemi verilsin. $y=e^{2x}$
$y=\sqrt{3}e^{2x}$, $y=ce^{2x}$ fonksiyonları denklemin çözümleridir. Burada c keyfi sabittir.
c den dolayı bu denklemin çözümlerinin sonsuz sayıda olduğu görülür. ($c \in \mathbb{R}$)

8

Örnek: $y''+y=0$ denklemi verilsin. $y=\cos x$
$y=\sin x$, $y=c_1\cos x$, $y=c_2\sin x$, $y=c_1\cos x+c_2\sin x$
(c_1 ve c_2 keyfi sabit) fonksiyonların her biri dif. denklemin çözümleridir. Yine c_1 ve c_2 keyfi sabitler olduğundan bu ikinci mertebeden denklemin çözümleri de sonsuz sayıdadır.
Bu sonsuz sayıda olan çözümleri sınıflandırmak gerekir. Bunun için şu tanımı verebiliriz.

<u>Tanım:</u> $f(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ (3)

dif. denklemi ve birbirinden bağımsız n-tane keyfi sabit $c_1, c_2, \dots, c_n$ olmak üzere

$$F(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0 \quad (4)$$

ifadesi verilsin. Eğer (4) deki her bir fonksiyon (3) denkleminin çözümü oluyorsa (4)'e (3)'ün <u>genel çözümü</u>, genel çözümdeki keyfi sabitlere özel değerler vererek elde edilen çözümlere <u>özel çözüm</u>, genel çözümdeki keyfi sabitlere özel değerler vererek elde edilemeyen çözümlere ise aykırı, singüler (tekil) çözüm denir.

Böylece dif. denklemin çözümleri üçe ayrılmış olur.

Burada genel çözümde <u>dif. denklemin mertebesi kadar</u> keyfi sabitin olduğuna dikkat edelim.

Örnek: $y'=1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

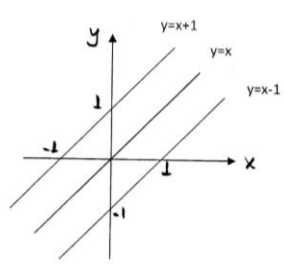
Çözüm: Denklem $\frac{dy}{dx}=1$ şeklinde yazılırsa buradan $dy=dx$ olup her iki tarafın integralinin alınmasıyla

$y=x+c$

genel çözümü bulunur. Genel çözümdeki c sabitinin keyfi değerleri için örneğin

$y=x,\ \ y=x+1,\ \ y=x-1$

özel çözümleri elde edilir.



Örnek: $y'=x$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

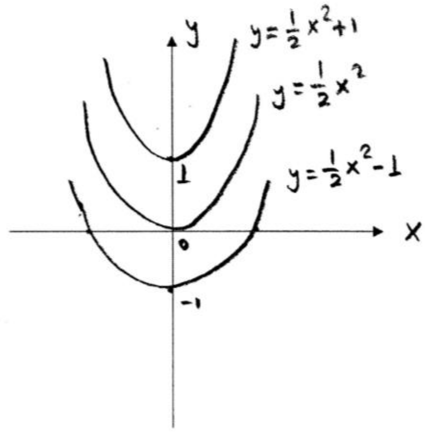
Çözüm: Denklem $dy=xdx$ formunda yazılıp integral alarak genel çözü

$y=\frac{x^2}{2}+c$

şeklinde bulunur. Bu eğri ailesi özel olarak parabol ailesidir. Genel çözümden elde edilen

$y=\frac{1}{2}x^2,\ \ y=\frac{1}{2}x^2+1,\ \ y=\frac{1}{2}x^2-1$

şeklindeki çözümlerinin her biri özel çözümdür.



Örnek: $y''=1$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklem $\frac{d^2y}{dx^2}=1$ şeklinde yazılırsa buradan $d^2y=dx^2$ olup bir kez integral alınmasıyla

$dy=(x+c_1)\,dx$

elde edilir. Bir kez daha integral alınırsa genel çözüm

$y=\frac{x^2}{2}+c_1x+c_2$

şeklinde bulunur. Genel çözümdeki sabitlere değerler verilerek elde edilen

$y=\frac{x^2}{2},\ \ y=\frac{x^2}{2}+2,\ \ y=\frac{x^2}{2}+3x$

çözümlerinin her biri özel çözümdür.

Tanım 1.3:

$$y^{(n)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}\right) \tag{1.4}$$

denklemi verilsin. Bu denklemin

13

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2,\dots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \tag{1.5}$$

koşulunu sağlayan çözümünün araştırılması problemine **başlangıç değer problemi** denir. Burada $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ dir. (5) koşuluna diferansiyel denklemin başlangıç koşulu denir. Başlangıç değer probleminin çözümleri koşuldan dolayı özel çözümlerdir.

14

Örnek: $y'=1$ denkleminin $y(0)=1$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz. (Veya türevi 1 olan fonksiyonlar içinde $(0,1)$ noktasından geçen integral eğrisini bulunuz.)

Çözüm: Genel çözüm

$y=x+c$

şeklinde bulunmuştu. $y(0)=1$ koşulunu sağlayan çözümü

1=0+c den c=1 olup

$y=x+1$ şeklinde bulunur.

Örnek: $y'=2x$ denkleminin $y(6)=8$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklemin genel çözümü

$y=x^2+c$

şeklinde olup $y(6)=8$ koşulunu sağlayan çözümü c=-28 için

$y=x^2-28$

şeklinde bulunur.

15

Örnek: $y''=e^x$ denkleminin $y(0)=1, y'(0)=0$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: İki kez integral alınmasıyla denklemin genel çözümü

$$y=e^x+c_1x+c_2$$

şeklinde elde edilir. Özel çözüm için $y(0)=1$ koşulundan $c_2=0$, $y'(0)=0$ koşulundan $c_1=-1$ bulunur. O halde istenen koşulu sağlayan çözüm

$$y=e^x-x$$

şeklinde bulunur.

16

Örnek: $y'''=0$ denkleminin $y(0)=1, y'(0)=-1, y''(0)=0$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: Üç kez integral alınmasıyla genel çözüm

$$y=c_1\frac{x^2}{2}+c_2x+c_3$$

şeklinde elde edilir. Özel çözüm için $y(0)=1$den $c_3=1$, $y'(0)=-1$den $c_2=-1$, $y''(0)=0$ dan $c_1=0$ olarak bulunur. O halde verilen koşulu sağlayan özel çözüm

$$y=-x+1$$

şeklinde bulunur.

Örnek: $y' = y$ denkleminin $y(1) = 0$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm: Denklem $y \neq 0$ için

$$\frac{dy}{y} = dx$$

şeklinde yazılıp integral alınırsa

$$\ln y = x + c_1$$

bulunur. Bunun da düzenlenmesi ile $y = e^{x+c_1}$ ve $c = e^{c_1}$ olmak üzere

$$y = ce^x$$

genel çözümü elde edilir. $y(1) = 0$ koşulunu sağlayan çözüm için genel çözümde $x = 1$ ve $y = 0$ değerlerinin yazılmasıyla $c = 0$ bulunur. Buna karşılık gelen çözüm $y = 0$ olur. Fakat $c = e^{c_1}$ olarak kabul edildiğinden $c \neq 0$ olmalıdır. O halde $y = 0$ aykırı çözümdür.

UZEM

Fırsatlar Sunar

Teşekkürler

Yrd. Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

Diferansiyel Denklemler I

Temel Kavramlar, Dif. Denk. Tanımı ve Çözümleri

Ünite 1