Fırsatlar Sunar

Alıştırmalar

2

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklemlerin sıfırıncı dereceden homojen denklem olduğunu göstererek genel çözümlerini bulunuz.

1) $y' = \left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2$ **2)** $y' = \dfrac{2xy}{y^2 - x^2}$ **3)** $y' = \dfrac{y}{x}(\ln y - \ln x) + \dfrac{y}{x}$

4) $y' = \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y-x}{x}$ **5)** $y' = e^{\frac{x}{y}} + \dfrac{y}{x}$ **6)** $y' = \sinh\dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$

7) $f(x,y)$ ikinci dereceden homojen fonksiyon olmak üzere $y' = \frac{f(x,y)}{y^2} + \frac{y}{x}$ denkleminin çözülebilir olduğunu gösteriniz.

3.3. $y' = \frac{ax+by+e}{cx+dy+f}$ Tipindeki Denklemler

$y' = f(x,y)$ denklemi verilsin. Eğer $e^2 + f^2 \neq 0$ olmak üzere $f(x,y) = \frac{ax+by+e}{cx+dy+f}$ ise $y' = \frac{ax+by+e}{cx+dy+f}$ denklemi sıfırıncı dereceden homojen denklem olmaz. Bu denkleme a, b, c ve d katsayılarının sağladığı özelliğe göre dönüşümler (değişken değiştirme) uygulanarak denklem ya değişkenlerine ayrılabilir denkleme yada sıfırıncı dereceden homojen denkleme dönüştürülür.

a) $ad - bc = 0$ olsun. Bu durumda denklem uygun dönüşüm yardımıyla değişkenlerine ayrılabilir denkleme indirgenir. Şöyle ki;

$ad - bc = 0$ olduğundan $\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = k$ yazılabilir. Buradan $c = ak$, $d = bk$ olur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa

$$y' = \frac{ax+by+e}{k(ax+by)+f} \tag{3.3}$$

elde edilir. Burada $u = u(x)$ olmak üzere $u = ax + by$ dönüşümü uygulanırsa $u' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{u'-a}{b}$ olur. Bu değerler (3.3) denkleminde yerine yazılırsa

$\frac{u'-a}{b}=\frac{u+e}{ku+f}$ ifadesi bunun da düzenlenmesiyle $u'=\frac{b(u+e)+a(ku+f)}{ku+f}$ denklemi elde edilir. Bu denklem

$$\frac{(ku+f)\,du}{b(u+e)+a(ku+f)}=dx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir formda yazılıp integral alınırsa

$$\int\frac{(ku+f)\,du}{b(u+e)+a(ku+f)}=x+c$$

olur. Sol tarafın integrali alınıp $u=ax+by$ yazılırsa denklemin genel çözümü elde edilmiş olur.

Örnek: $y'=\frac{x-y+1}{2x-2y+1}$ denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm: $a=1,\ b=-1,\ c=2,\ d=-2\quad e=f=1\neq 0$ olup $\quad ad-bc=-2-(-2)=0$ dır.

$\frac{c}{a}=\frac{d}{b}=k\Rightarrow\frac{2}{1}=\frac{-2}{-1}=2\Rightarrow k=2$ den

$$y'=\frac{x-y+1}{2(x-y)+1}$$

olur. $u=x-y$ dönüşümü uygulanırsa $u'=1-y'\Rightarrow y'=1-u'$ olur. Bu ifadeler denklemde yazılırsa

$$1-u'=\frac{u+1}{2u+1}$$

elde edilir. Bunun da düzenlenmesi ile

7

Bunun da düzenlenmesi ile

$$u' = \frac{u}{2u+1}$$

yani

$$\frac{2u+1}{u}du = dx$$

şeklinde değişkenlerine ayrılmış denklem elde edilir. Buradan integral alınırsa

$$2u + \ln u = x + c$$

ve $u = x - y$ yazılırsa da genel çözüm

8

Örnek: $y' = \frac{2x-y+2}{x+y-5}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $a=2$, $b=-1$, $c=1$, $d=1$ olmak üzere
$ad-bc = 2+1 = 3 \neq 0$ old. dan bu denkleme

$$\left.\begin{aligned} x &= X+h \\ y &= Y+k \end{aligned}\right\}$$

dönüşümü uygulanmalıdır. Bunun için

$$\left.\begin{aligned} 2h-k+2 &= 0 \\ h+k-5 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminden $h=1$, $k=4$ bulunur. Buna göre dönüşüm $x = X+1$, $y = Y+4$ şeklinde elde edilir. Bu dönüşüm denkleme uygulanırsa $y' = Y'$ olmak üzere

9

$$y' = \frac{2(x+1)-(y+4)+2}{x+1+y+4-5} \Rightarrow y' = \frac{2x-y}{x+y}$$ şeklinde

sıfırıncı dereceden homojen denkleme dönüşür.

Bu denklemi çözmek içinde $y=ux$ dönüşümü uygulanırsa $y'=u'x+u$ olmak üzere denklem

$$u'x+u = \frac{2x-ux}{x+ux} \Rightarrow$$ Burada sağ taraftaki x-ler sadeleşecektir. Bu her zaman beklenen durumdur.

İşlemler yapılırsa denklem

10

$$u'x = \frac{2-2u-u^2}{1+u} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{2-2u-u^2}{1+u} \Rightarrow \frac{1+u}{2-2u-u^2}du = \frac{dx}{x}$$

değişkenlerine ayrılmış denklem elde edilir. integral alınırsa

$$\int \frac{1+u}{2-2u-u^2}du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(2-2u-u^2) = \ln x + C$$

Burada $u = \frac{y}{x} = \frac{y-4}{x-1}$ yazılırsa

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left(2-2\frac{y-4}{x-1}-\left(\frac{y-4}{x-1}\right)^2\right) = \ln(x-1)+C$$ genel

çözüm bulunur.

11

Örnek: $y' = \dfrac{2y - x + 1}{2x - y + 1}$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: $a=1$ $b=2$, $c=2$, $d=-1$ old.dan $ad-bc=-1-4=-5\neq 0$ old.dan $x=X+h$, $y=Y+k$ dönüşümü uygulanır. Buna göre

$\left.\begin{array}{l} 2k+h+1=0 \\ 2h-k+1=0 \end{array}\right\}$ denklem sisteminden $h=-\frac{3}{5}$, $k=-\frac{1}{5}$ bulunur.

$\left.\begin{array}{l} x=X-\frac{3}{5} \\ y=Y-\frac{1}{5} \end{array}\right]$ $y'=Y'$ dönüşümü denkleme uygulanırsa

denklem $Y' = \dfrac{2Y - X}{2X - Y}$ olur.

12

$Y = uX$ dönüşümü uygulanırsa

$$u'X + u = \frac{2uX + X}{2X - uX} \Rightarrow u'X = \frac{2u+1}{2-u} - u \quad \frac{du}{dX}X = \frac{2u+1-2u+u^2}{2-u}$$

$$\int \frac{2-u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dX}{X} \Rightarrow \int \frac{2}{1+u^2}\,du - \int \frac{u}{1+u^2}\,du = \int \frac{dX}{X}$$

$2\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln X + c$ bulunur. Burada

$u = \dfrac{Y}{X} = \dfrac{y + \frac{1}{5}}{x + \frac{3}{5}}$ yazılırsa genel çözüm

13

$$2\arctan\frac{y+\frac{1}{5}}{x+\frac{3}{5}}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+\frac{1}{5}}{x+\frac{3}{5}}\right)^2\right)=\ln\left(x+\frac{3}{5}\right)+c$$

şeklinde bulunur. Eğer $y(0)=-\frac{1}{5}$ şartını sağlayan çözümü isteseydi genel çözümde $x=0$, $y=-\frac{1}{5}$ yazılırsa $c=-\ln\frac{3}{5}$ bulunur. İstenen özel çözüm

$$2\arctan\frac{y+\frac{1}{5}}{x+\frac{3}{5}}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y+\frac{1}{5}}{x+\frac{3}{5}}\right)^2\right)=\ln\left(x+\frac{3}{5}\right)-\ln\frac{3}{5}$$ olur.

14

Alıştırmalar

1) Aşağıda denklemleri genel çözümlerini bulunuz

a) $y'=\frac{x-y+1}{y-x+1}$ b) $y'=\frac{2x-y-1}{x+y-2}$ c) $y'=y-x+2$

d) $y'=\frac{1}{y-x+2}$ e) $y'=1-\frac{2}{x-y+3}$ f) $y'=\frac{x+2y-1}{y-2x}$

g) $(x+2y-1)dx-(2x-y-1)dy=0$

15

2) Aşağıda denklemlerin çözümlerini bulunuz

a) $y' = \dfrac{x+y}{x-y+1}$, $y(1)=0$

b) $y' = \dfrac{2x-y+1}{2y-4x+2}$, $y(0)=1$

c) $y' = \dfrac{-x+2y-1}{2x-y-1}$, $y(0)=0$

16

3) a) $y' = f(ax+by+e)$ b) $y' = f\left(\dfrac{1}{ax+by+e}\right)$

denklemlerinin çözülebildiğini gösteriniz.

17

Teşekkürler

Yrd. Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK

- Diferansiyel Denklemler I
- Alıştırmalar
- Ünite 4