BÖLÜM 3

ÖZEL TEKNİKLER

3.1 Laplace Denklemi

3.1.1 Giriş

Durgun elektriğin esas amacı, verilen bir durgun yük dağılımının elektrik alanının bulunmasıdır. İlke olarak, bu amaç Denklem 2.8'deki

$$\vec{E}(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_P \frac{\hat{\boldsymbol{\imath}}}{\boldsymbol{\imath}^2}\rho(r')\,d\tau' \qquad (3.1)$$

Coulomb yasasıyla gerçekleştirilir. Bu tip integrallerin hesabı, en basit yük dağılımları dışında, zor olabilir. Simetriden faydalanarak ve Gauss yasasını kullanarak bunun üstesinde gelebiliriz, fakat genellikle en iyi strateji ilk önce, daha çözülebilir olan Denk. 2.29 ile verilen

$$V(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{\mathscr{r}}d\tau' \tag{3.2}$$

V potansiyelini hesaplamaktır. Bu integral bile hâlâ analitik olarak alınması çok zordur. Bu gibi durumlarda, iletkenleri ilgilendiren problemlerde ρ'nun kendisi önceden bilinmeyebilir: çünkü yük etrafa hareket etmekte serbesttir, doğrudan kontrol edebildiğimiz tek şey her bir iletkenin toplam yüküdür (veya belki potansiyelidir). Böyle hallerde Poisson denklemini (2.24) kullanarak

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{3.3}$$

problemi diferansiyel şekle sokmak verimlidir, bu ise uygun sınır koşullarıyla birlikte Denk. 3.2'ye eşdeğerdir. Gerçekten, çoğunlukla $\rho = 0$ olan bir bölgedeki potansiyeli bulmakla ilgileniriz. (Her yerde $\rho = 0$ ise, o zaman $V = 0$'dır ve daha fazla söyleyecek bir şey yoktur. Başka yerlerde bol miktarda yük olabilir, fakat biz dikkatimizi herhangi bir yükün olmadığı bölgelere veriyoruz.) Bu durumda Poisson denklemi Laplace denklemine indirgenir:

$$\nabla^2 V = 0 \tag{3.4}$$

veya kartezyen koordinatlarda yazdığımızda,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0 \tag{3.5}$$

Bu formül, durgun elektrik hemen hemen Laplace denkleminin incelenmesinden ibarettir denebilecek kadar temeldir. Aynı zamanda fiziğin kütle çekimi ve magnetizma, ısı teorisi ve sabun kabarcıklarının incelenmesi gibi çok farklı dallarında gözüken, her yerde karşımıza çıkan türden bir denklemdir. Matematikte analitik fonksiyon teorisinde çok önemli bir rol oynar. Laplace denklemi ve çözümleri (bunlara harmonik fonksiyonlar denir) hakkında bir fikir edinmek üzere, resmetmesi daha kolay olmaları ve üç boyutlu halin tüm esas özelliklerini göstermeleri nedeniyle, biz bir ve iki boyutlu halleri ele alarak başlayacağız.

3.1.2 Bir Boyutta Laplace Denklemi

V'nin yalnızca bir değişkene, x, bağlı olduğunu varsayalım. Laplace denklemi

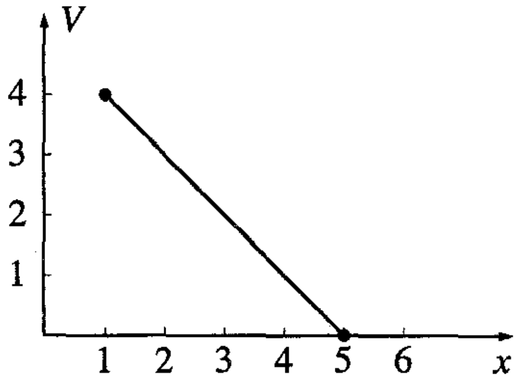
$$\frac{d^2V}{dx^2}=0$$

haline gelir. Genel çözüm

$$V(x)=mx+b \tag{3.6}$$

ile verilen düz bir doğru denklemidir. Çözüm, ikinci dereceden bir diferansiyel denklem için uygun olduğu üzere, belirlenmemiş iki sabit (m ve b) içerir. Herhangi bir özel halde, bunlar o problemin sınır koşullan tarafından belirlenir. Örneğin, $x=1$'de $V=4$ ve $x=5$'de $V=0$ olduğu belirtilebilir. Bu durumda $m=-1$ ve $b=5$'dir, böylece $V=-x+5$ olur (Şek. 3.1).

Dikkatinizi bu sonucun iki özelliğine çekmek istiyorum; genel çözümü tam olarak yazabildiğim bir boyutta bu özellikler açıkça gözükebilir, fakat iki ve üç boyutlu benzerleri güçlüdür ve hiç bir şekilde aşikâr değildirler:



Şekil 3.1

1. $V(x)$ her a için $V(x+a)$ ve $V(x-a)$'nın ortalamasıdır:

$$V(x)=\frac{1}{2}\left[V(x+a)+V(x-a)\right]$$

Laplace denklemi bir çeşit ortalama alma talimatıdır; x noktasına, x'in solundaki ve sağındaki değerlerin ortalamasını almamızı söyler. Bu anlamda, Laplace denkleminin çözümleri, olabildikleri kadar sıkıcıdır ve buna rağmen uç noktalara gerektiği gibi uyarlar.

2. Laplace denklemi hiçbir yerel maksimuma ve minimuma izin vermez; V'nin uç değerleri uç noktalarında gözükmelidir. Gerçekte, bu (1)'in bir sonucudur, çünkü yerel bir maksimum bulunsaydı bu noktadaki V her iki yandaki V'den daha büyük olurdu ve bu yüzden bu iki değerin ortalaması olamazdı. (Genellikle, ikinci türevin bir maksimumda negatif ve minimumda da pozitif olmasını beklersiniz. Buna zıt olarak Laplace

denklemi ikinci türevin sıfır olmasını gerektirdiğinden, çözümlerin bir uç değer göstermemesi akla yakın gözükmektedir. Bununla beraber, ikinci türevin yok olduğu noktalarda maksimumlar ve minimumlar gösteren fonksiyonlar bulunduğu için, bu bir ispat değildir: örneğin, x^4, $x=0$ noktasında böyle bir maksimuma sahiptir.)

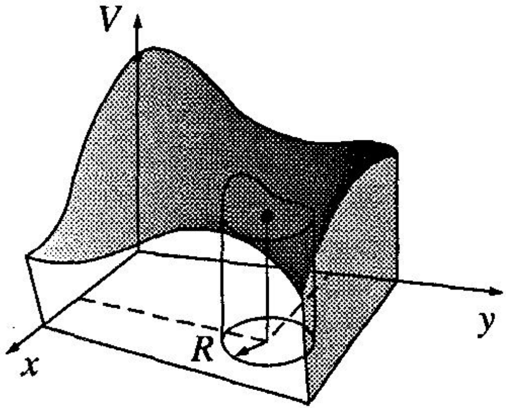
3.1.3 İki Boyutta Laplace Denklemi

V iki değişkene bağlı olursa, Laplace denklemi şöyle olur,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

Bu artık adî bir diferansiyel denklem (yani, yalnızca sıradan türevleri içeren bir denklem) değildir; bu bir kısmî türevli diferansiyel denklemdir. Sonuç olarak, alışık olduğunuz basit kurallardan bazıları geçerli değildir. Örneğin bu denklemin genel çözümü yalnızca iki keyfî sabit içermez veya, bu anlamda, ikinci dereceden bir denklem olduğu halde- sonlu bir sayıdaki sabitleri içermez. Gerçekten, bir "genel çözüm" yazamayız (en azından, Denk. 3.6 gibi kapalı biçimde). Yine de, tüm çözümler için ortak bazı özellikler elde etme olanağımız vardır.

Fiziksel bir örneği aklımıza getirmek faydalı olabilir. Bir desteğe gerili durumdaki ince bir lâstik yaprağı (veya bir sabun filmini) düşününüz. Kesinlik için, bir karton kutu aldığınızı varsayınız, tüm etrafından dalgalı çizgi şeklinde kesiniz ve üst parçasını atınız (Şek. 3.2). Sonra kutunun üzerine iyice gerilmiş lâstik zarı, bir davul derisi gibi oturacak şekilde, yapıştırıcı ile yapıştırınız. Şimdi, kutunun dibine $\left(x,y\right)$ koordinatlarını yazarsanız, $\left(x,y\right)$ noktasının yukarısındaki zarın yüksekliği $V\left(x,y\right)$ Laplace denklemini sağlayacaktır. (Bir boyutlu benzeşme iki nokta arasına gerilmiş bir lâstik şerit olacaktı. Elbette, o düz bir doğru oluştururdu.)



Şekil 3.2

İki boyuttaki harmonik fonksiyonlar bir boyutta belirttiğimiz aynı özelliklere sahiptirler:

1.Bir (x,y) noktasındaki V'nin değeri etrafındaki V'lerin ortalamasıdır.

Daha kesin olarak, (x, y) noktası etrafında herhangi bir R yarıçaplı daire çizerseniz, daire üzerindeki V'nin ortalama değeri merkezdeki değere eşittir:

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{daire} V dl$$

(bu arada, bu bize Laplace denkleminin bilgisayar çözümlerinin dayandığı gevşeme yöntemini önerir: V'nin sınırındaki verilen değerlerden ve içerdeki noktalardan oluşturulan bir ızgara üzerindeki V'lerin makul tahminlerinden başlayarak, ilk aktarım her bir noktaya o noktanın en yakın komşularının ortalamasını değer olarak yeniden atar.

İkinci aktarım, düzeltilmiş değerleri kullanarak işlemi yineler ve böyle devam eder. Birkaç tekrarlamadan sonra, sayılar oturuşmaya başlar, böylece daha sonraki aktarımlar göz ardı edilebilir değişiklikler doğurur ve verilen sınır koşullarıyla birlikte Laplace denkleminin sayısal bir çözümü gerçekleştirilmiştir.).

2.V bir yerel maksimum ve minimuma sahip değildir; bütün uç değerler sınırlarda ortaya çıkar. (Önceki gibi, bu (l)'in bir sonucudur.) Yine, Laplace denklemi, sınır koşullarıyla uyumlu en özelliksiz fonksiyonu çözüm olarak alır: tepeler yok, vadiler yok yalnızca hazırdaki en düzgün yüzey. Örneğin, Şek. 3.2'deki gerilmiş lastik yaprak üzerine bir pin pon topunu koyarsanız, top bir tarafa doğru yuvarlanarak düşecektir-içine girip yerleşeceği bir "cep" bulamayacaktır, çünkü Laplace denklemi yüzeyde böyle çukurlara izin vermez. Geometrik bakış açısı bakımından, aynen iki nokta arasındaki en kısa uzaklığın düz bir doğru olması gibi, iki boyuttaki bir harmonik fonksiyon verilen sınır çizgisine gerilen yüzey alanını en küçük yapar.

3.1.4 Üç Boyutta Laplace Denklemi

Üç boyutta ne net bir çözüm sağlayabiliriz (bir boyuttaki gibi) ne de sezginizi yönlendirecek fikir verici fiziksel bir örnek verebiliriz (iki boyutta yaptığımız gibi.). Yine de aynı özellikler doğru kalmakta devam eder ve bu kez bir ispatın ana hatlarını gösterelim.

1.Bir r noktasındaki V'nin değeri r'de merkezlenmiş R yarıçaplı bir küresel yüzey üzerinden alınan V'nin ortalama değeridir:

$$V(r)=\frac{1}{4\pi R^2}\oint_{küre} V da$$

2.Sonuç olarak, bir yerel maksimum veya minimuma sahip olamayız; V'nin uç değerleri sınırlarda gözükmelidir. (V'nin r'de bir yerel maksimumu olsaydı, o zaman, maksimumun kendi özelliğinden dolayı r'nin etrafına, üzerinde V'nin bütün değerlerinin (sonuç olarak da ortalamanın) r'dekinden daha az olduğu, bir küre çizebilirdik.

İspat: R yarıçaplı bir küresel yüzey üzerinden, küre dışında yerleşmiş bir tek q nokta yükünden kaynaklanan ortalama potansiyeli hesaplayarak başlayalım. Küreyi başlangıç noktasında da çizebiliriz ve q'nun koordinatlarını z-ekseni üzerinde olacak şekilde seçebiliriz (Şek. 3.3).

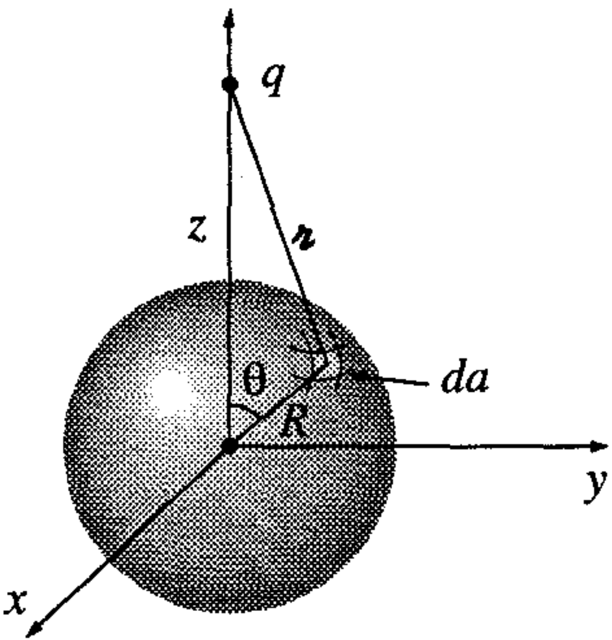
Yüzey üzerindeki bir noktada potansiyel

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\mathscr{r}}$$

dir, burada

$$\mathscr{r}^2 = z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta$$

dır, böylece



Şekil 3.3

$$V_{ort} = \frac{1}{4\pi R^2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\left[z^2+R^2-2zR\cos\theta\right]^{-1/2}R^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2zR}\sqrt{z^2+R^2-2zR\cos\theta}\bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2zR}\left[\left(z+R\right)-\left(z-R\right)\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{z}$$

olur. Fakat bu tam olarak kürenin merkezindeki q'dan kaynaklanan potansiyeldir. Toplanabilirlik ilkesiyle, aynı ispat küre dışında herhangi bir yük topluluğuna da uygulanabilir: bu yüklerin küre yüzeyindeki ortalama potansiyeli küre merkezinde oluşturdukları net potansiyele eşittir. İspatı yapılması gereken bu idi.

3.1.5 Sınır Koşulları ve Tek Çözüm Teoremleri

Laplace denklemi tek başına V'yi belirlemez; ek olarak, uygun bir takım sınır koşullarının verilmesi gerekir. Bu ise bir soruyu ortaya çıkarır: uygun sınır koşulları nedir? Bir boyutlu hal basittir, çünkü burada genel çözüm $V = mx + b$ iki keyfî sabit içerir ve bu yüzden iki sınır koşulu ister. Örneğin, iki uçta fonksiyonun değerini verebilirdik veya bir uçta fonksiyonun ve türevinin değerini verebilirdik ya da bir uçta fonksiyonun değerini ve diğer uçta türevini verebilirdik ve böyle giderdik. Fakat bir uçta yalnızca fonksiyonun değeri veya türevi ile yetinemezdik-bu yetersiz bilgi olurdu. Her iki uçta türevleri vermek de yetmezdi-bu ya fazlalık olurdu (iki değer eşitse) ya da tutarsız (eşit değillerse).

İki veya üç boyutta kısmî türevli bir diferansiyel denklemle karşı karşıya kalırız ve kabul edilebilir sınır koşullarının ne olduğunu kestirmek o kadar kolay değildir. Örneğin, gerili bir lâstik zarın şekli, üzerine gerildiği çerçeve tarafından belirlenir mi yoksa bir konserve kavanozu kapağı gibi, bir kapalı şekillenimden diğer birine saklayarak geçiş yapar mı? Bunun yanıtı, V'nin sınırdaki değeri tarafından tek olarak belirlendiğidir. Bunula beraber, başka sınır koşulları da kullanılabilir (bakınız Problem 3.4). Teklif edilen bir sınır koşullan takımının yeterli olduğunun ispatı genellikle bir tek çözüm teoremi şeklinde sunulur.

Durgun elektrikte, hepsi de aynı temel biçimi paylaşan, buna benzer çok sayıda teoremler vardır. Biz en faydalı olan ikisini inceleyelim.

Birinci tek çözüm teoremi: Sınır yüzeyi S üzerinde V verilirse, Laplace denkleminin bir $\mathcal{V}$ hacmi içindeki çözümü tek olarak belirlenir.

İspatı: Şekil 3.5'de böyle bir bölge ve sınırı çizilmiştir. (Yüzeylerinin hepsi üzerinde V verildiği sürece, içeride "adalar" da olabilir; aynı zamanda en dış yüzey V'nin genellikle sıfır olarak alındığı sonsuzda da olabilir). Laplace denkleminin iki çözümü olduğunu varsayınız:

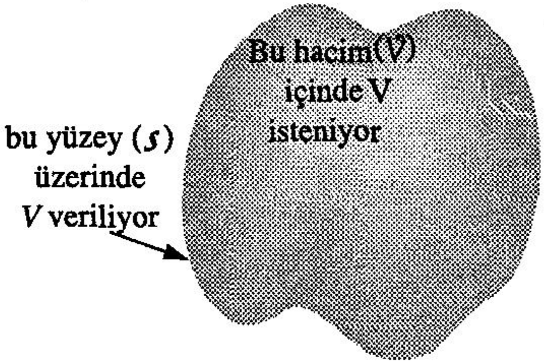
$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad ve \quad \nabla^2 V_2 = 0$$

bunların her ikisi de yüzeyde verilen değeri almaktadır. Bu iki fonksiyonun eşit olmak zorunda olduğunu ispat etmek istiyoruz. Hile yapalım ve bunların farkına bakalım:

$$V_3 = V_1 - V_2$$

Bu Laplace denklemine uyar,

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = 0,$$



Şekil 3.5

ve tüm sınırların üzerinde sıfır değerini alır (çünkü orada V_1 ve V_2 eşittirler.) Fakat Laplace denklemi bir yerel maksimum veya minimuma izin vermez -tüm uç değerler sınırların üzerinde oluşur. Bu yüzden V_3'ün maksimumu ve minimumununun ikisi de sıfırdır. Bu sebeple V_3 her yerde sıfır olmalıdır ve buradan $V_1 = V_2$. İspatı gereken budur.

Örnek 3.1

İçinde hiç bir yük olmamak kaydıyla, tamamen iletken malzeme ile çevrilmiş bir mahfaza içinde potansiyelin sabit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Kavite (mahfaza) duvarı üzerinde potansiyel sabit bir V_0 değerindedir (bu kısım 2.5.1'deki şık (iv)'dır), böylece içerideki potansiyel Laplace denklemini sağlayan ve sınırda V_0 sabit değerini alan bir fonksiyondur. Her yerde $V = V_0$'dır. Tek çözüm teoremi bunun tek çözüm olduğunu garantiler. (Boş bir kavite içinde alanın sıfır olduğu anlaşılır -Kısım 2.5.2'de tamamen değişik yollardan bulduğumuz sonuçla aynıdır.).

Tek çözüm teoremi hayal gücünüz için verilmiş bir ruhsattır. Çözüme nasıl ulaştığınız önemli değildir; önemli olan (a) Laplace denklemi sağlaması ve (b) sınır üzerinde doğru değerleri almasıdır, o zaman çözüm doğrudur. Görüntü yöntemine geldiğimizde bu fikrin gücünü göreceksiniz.

Bu arada, birinci tek çözüm teoremi üzerinde ilerleme yapmak kolaydır. Ele aldığımız bölge içinde bir yük olmadığını kabul etmiştik, böylece potansiyel Laplace denklemine uymuştu, fakat içeriye bir miktar yük de koyabiliriz (bu durumda V Poisson denklemine uyar.) Tartışma aynıdır, fakat bu kez

$$\nabla^2 V_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Böylece

$$\nabla^2 V_3 = \nabla^2 V_1 - \nabla^2 V_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0.$$

Bir kez daha fark $\left(V_3 = V_1 - V_2\right)$ Laplace denklemini sağlar ve tüm sınırlarda sıfır değerine sahiptir, bu yüzden $V_3 = 0$ ve buradan $V_1 = V_2$ çıkar.

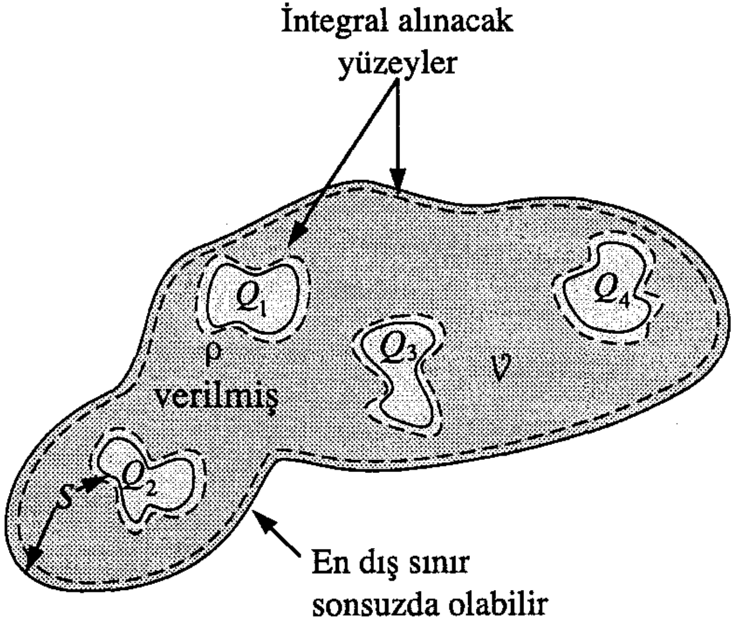
Sonuç: Bir V hacmi içindeki potansiyel (a) bölgenin her yerindeki yük yoğunluğu ve (b) tüm sınırlar üzerinde V'nin değeri belirtilirse, tek olarak belirlenir.

3.1.6 İletkenler ve İkinci Tek Çözüm Teoremi

Bir durgun elektrik problemi için sınır koşullarını ortaya koymanın en basit yolu ilgilenilen bölgeyi saran tüm yüzeyler üzerinde V'nin değerini belirtmektir. Ve uygulamada genellikle şöyle bir durum meydana gelir: Lâboratuvarda bataryalara bağlı iletkenler vardır ve bunlar iletkenleri verilen bir potansiyelde tutar veya iletkenler toprağa bağlıdır, deneycinin diline ise bu $V = 0$ demektir. Ancak, sınırda potansiyeli bilmediğimiz, onun yerine çeşitli iletken yüzeyler üzerindeki yükleri bildiğimiz başka durumlar da vardır. Birinci iletkenin üzerine Q_1'nin yükünü, ikinciye Q_2 ve bunun gibi devam eden yükleri koyduğumu varsayalım. Ve daha da zor olmak üzere, iletkenler arasındaki bölgede verilen bir ρ yük yoğunluğu bulunsun. Şimdi elektrik alan tek olarak belirlenmiş midir? Veya belki de yüklerin kendilerini ait oldukları iletkenlerin üzerinde düzenleyebileceği belirli sayıda farklı yollar var mıdır ve bu yollar farklı alanlar verebilir mi?

İkinci tek çözüm teoremi: İletkenlerle çevrilmiş olan ve verilen bir ρ yük yoğunluğu içeren bir $\mathcal{V}$ hacmi içindeki elektrik alan, her bir iletken üzerindeki toplam yük verildiği takdirde (Şekil 3.6) tek olarak belirlidir. (Bölge bir bütün olarak başka bir iletken tarafından çevrilmiş veya sınırsız olabilir.)

İspat: Problemin koşullarını sağlayan iki alan bulunduğunu varsayalım. Her ikisi de iletkenlerin arasındaki uzayda diferansiyel şekildeki Gauss yasasına uyarlar:


İntegral alınacak
yüzeyler
Q_1
Q_2
Q_3
Q_4
ρ
verilmiş
V
S
En dış sınır
sonsuzda olabilir

Şekil 3.6

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1=\frac{\rho}{\varepsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Alanların her ikisi, her bir iletkeni kapsayan bir Gauss yüzeyi için integral şeklindeki Gauss yasasına da uyarlar:

$$\oint_{i.iletken\ yüzeyi}\vec{E}_1\cdot d\vec{a}=\frac{Q_i}{\varepsilon_0}\qquad \oint_{i.iletken\ yüzeyi}\vec{E}_2\cdot d\vec{a}=\frac{Q_i}{\varepsilon_0}$$

Bunun gibi, en dış sınır için (bu bir kapsayıcı iletkenin hemen içinde veya sonsuzda olduğuna bakılmaksızın),

$$\oint_{en\ dış\ sınır}\vec{E}_1\cdot d\vec{a}=\frac{Q_{top}}{\varepsilon_0}\qquad \oint_{en\ dış\ sınır}\vec{E}_2\cdot d\vec{a}=\frac{Q_{top}}{\varepsilon_0}$$

önceden olduğu gibi, farka bakarız

$$\vec{E}_3 \equiv \vec{E}_1 - \vec{E}_2$$

bu fark iletkenler arasındaki bölgede

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3 = 0 \tag{3.7}$$

denklemine uyar ve her bir sınır yüzeyinde de

$$\int \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0 \tag{3.8}$$

denklemine uyar.

Şimdi kendisinden faydalanacağımız bir bilgi parçası daha kaldı: Her ne kadar Q_i yükünün kendisini i'nci iletken yüzey üzerinde nasıl dağıtacağını bilmiyorsak da, her bir iletkenin bir eş potansiyel olduğunu ve buradan V_3'ün her bir iletken yüzeyde bir sabit (hepsinde aynı sabit olmak zorunda değil) olduğunu biliyoruz. (V_1 ve V_2 eşit olmayabileceği için bu sabitin sıfır olması gerekmez-emin olduğumuz tek şey bu iki değerin verilen her iletken boyunca sabit olduğudur) Bundan sonra bir dönüşüm yapıyoruz. Çarpım kuralı no (5)'den faydalanarak, şunu elde ederiz.

$$(5) \quad \vec{\nabla} \cdot \left(f\vec{A} \right) = f\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) + \vec{A} \cdot \left(\vec{\nabla} f \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(V_3 \vec{E}_3 \right) = V_3 \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_3 \right) + \vec{E}_3 \cdot \left(\vec{\nabla} V_3 \right) = -\left(E_3 \right)^2$$

Burada Denk. 3.7'yi $\left(\int \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = 0\right)$ ve $\vec{E}_3 = -\vec{\nabla} V_3$'ü kullandık. İletkenler arasındaki tüm bölge üzerinden bunun integralini alarak ve sol tarafa diverjans teoremini uygulayarak

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(V_3 \vec{E}_3\right) d\tau = \oint_S V_3 \vec{E}_3 \cdot d\vec{a} = -\int_V \left(E_3\right)^2 d\tau$$

Yüzey integrali göz önüne alınan bölgenin tüm sınırlarını kapsar(iletkenler ve en dış sınır). Şimdi V_3 her bir yüzey boyunca sabittir (en dış sınır sonsuz ise, orada $V_3 = 0$'dır), böylece V_3 her integralin dışına çıkar ve geriye kalan Denk. 3.8'e göre sıfırdır. Bu yüzden

$$\int_V (E_3)^2 d\tau = 0$$

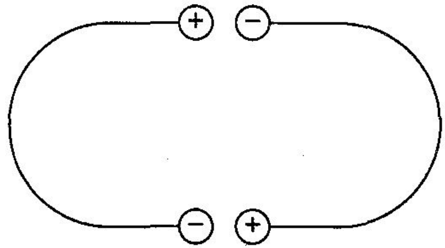
dır. Fakat, bu integralin içi asla negatif değildir; sonucun sıfır olabilmesinin tek yolu her yerde $V_3 = 0$ olmasıdır.

Sonuç olarak, $\vec{E}_1 = \vec{E}_2$ ve teorem ispatlanmıştır.

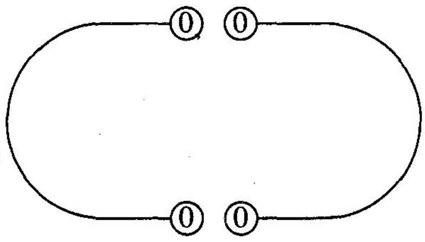
Bu ispat kolay değildi ve teoremin kendisinin ispattan daha akla yatkın gelmesi gibi gerçek bir tehlike vardır. İkinci tek çözüm teoreminin "aşikâr" olduğunu düşünmeniz halinde Purcell'in şu örneğine bakınız: Şek. 3.7 artı yüklerin eksilerin yakınında yer aldığı $\pm Q$ yüklü dört iletkenden oluşan sakin bir durgun elektrik şekillenimini göstermektedir. Sistem çok kararlı görünmektedir. Şimdi, onları, Şekil 3.8'de gösterildiği gibi çiftler halinde ince tellerle birleştirirsek ne olur? Pozitif yükler (çok sevdikleri yer olan) negatif yüklerin çok yakınında olduklarından pekâlâ hiçbir şey olmaz diye tahminde bulunabilirsiniz-şekillenim hâlâ kararlıdır diyebilirsiniz.

Bu akla yatkın görünüyor, ama yanlıştır. Şekil 3.8'deki şekillenim olanaksızdır. Çünkü şimdi etkin olarak iki iletken vardır ve her biri üzerindeki yük de sıfırdır. Bu iletkenlerin üzerine sıfır yükü dağıtmanın olası bir yolu hiçbir yerde yükün toplanmadığı ve dolayısıyla alanın her yerde sıfır olduğu düzenlemedir (Şek. 3.9). İkinci tek çözüm teoreminden dolayı, bu çözüm olmalıdır: Yük ince teller boyunca akacak ve kendisini bu yolla sıfırlayacaktır.

Şekil 3.7



Şekil 3.8

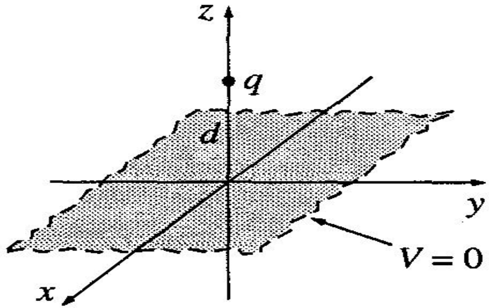


Şekil 3.9

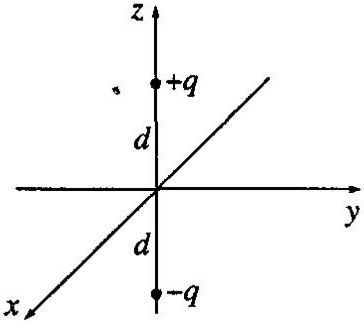
3.2 Görüntü Yöntemi

3.2.1 Klasik Görüntü Problemi

Bir q nokta yükünün topraklanmış sonsuz bir iletken düzlemin yukarısında bir d uzaklığında tutulduğunu varsayalım (Şek. 3.10). Soru: Düzlemin üstündeki bölgede potansiyel nedir? q yükü iletkenin yakın yüzeyinde belirli bir miktarda negatif yük indükleyeceği için, aranan ifade yalnızca $(1/4\pi\varepsilon_0)q/r$ olmaz, toplam potansiyel kısmen doğrudan q'ya aittir ve kısmen de bu indüklenmiş yükten ileri gelir. Fakat ne kadar yük indüklendiğini veya indüklenmiş yükün nasıl dağıldığını bilmeden nasıl olur da potansiyeli hesaplayabiliriz?



Şekil 3.10



Şekil 3.11

Matematiksel bakış açısından problemimiz, bir tek q nokta yükünün $(0,0,d)$'de bulunduğu $z>0$ bölgesinde Poisson denklemini aşağıdaki sınır koşullarına bağlı olarak çözmektir:

1. $V=0$ $z=0$ olduğunda (iletken düzlem topraklandığı için) ve

2. $V\rightarrow 0$ yükten çok uzaklarda (yani $x^2+y^2+z^2 \gg d$ için).

Birinci tek çözüm teoremi (aslında, onun sonucu) bu koşullara uyan yalnız bir tek fonksiyonun var olduğunu garantiler. Hile ile veya akıllı tahminle böyle bir fonksiyonu keşfedebilirsek, o doğru yanıt olmak zorundadır.

Hile: Gerçek problemi unutalım; tamamen değişik bir durumu inceleyeceğiz. Bu yeni problem $\left(0,0,d\right)$'de bulunan $+q$ nokta yükü ile $\left(0,0,-d\right)$'deki $-q$ nokta yükünden oluşur ve arada da hiçbir iletken düzlem yoktur (Şek. 3.11). Bu şekillenim için potansiyeli kolayca yazabilirim:

$$V(x,y.z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}}-\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}}\right] \qquad (3.9)$$

(Paydalar $(x,y.z)$ noktasından karşılıklı olarak $+q$ ve $-q$ yüklerine olan uzaklıklarını gösterirler.) Buradan şunu görebiliriz.

1. $V=0$ $z=0$ olduğunda ve

2. $V\rightarrow 0$ $x^2+y^2+z^2 \gg d$ için

ve $z>0$ bölgesindeki tek yüz yalnızca $(0,0,d)$'deki $+q$ nokta yüküdür. Fakat bunlar tam olarak orijinal problemin koşullarıdır. Açıkça ele aldığımız ikinci şekillenim "üst" bölgede, $z>0$, ilk baştaki şekillenirde aynı potansiyeli oluşturmaktadır. ("Alt" bölge, $z<0$, tamamen farklıdır, fakat ona kim bakar? Bizim tek istediğimiz şey üst kısımdır.) Sonuç: topraklanmış sonsuz bir iletken düzlemin yukarısındaki bir nokta yükün potansiyeli $z\geq 0$ için Denk. 3.9 ile verilir.

Bu tartışmada tek çözüm teoreminin oynadığı hayatî role dikkat ediniz: O olmasaydı, tamamen değişik bir yük dağılımından elde edilen bu çözümün doğruluğuna kimse inanmazdı. Ama tek çözüm teoremi şunu garantiler: İlgilenilen bölgede Poisson denklemini sağlıyorsa ve sınırlarda doğru değerleri alıyorsa o zaman bu çözüm doğru çözümdür.

3.2.2 İndüklenmiş Yüzey Yükü

Şimdi potansiyeli biliyoruz, artık iletkenin üzerinde indüklenen (σ yüzey yükünü hesaplamak kolay bir iştir. Denk. 2.49'a göre,

$$\sigma = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n}$$

olup burada $\partial V / \partial n$ V'nin yüzeydeki normal türevdir. Bu durumda normal doğrultu z yönüdür, böylece

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{z=0}$$

olur. Denklem 3.9'dan

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-q\left(z-d\right)}{\left[x^2+y^2+\left(z-d\right)^2\right]^{3/2}}+\frac{q\left(z+d\right)}{\left[x^2+y^2+\left(z+d\right)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

Böylece

$$\sigma\left(x,y\right) = -\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial z} = -\varepsilon_0\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-qz+qd}{\left[x^2+y^2+\left(z-d\right)^2\right]^{3/2}}+\frac{qz+qd}{\left[x^2+y^2+\left(z+d\right)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$\sigma(x,y)=\frac{-qd}{2\pi\left(x^2+y^2+d^2\right)^{3/2}} \tag{3.10}$$

elde ederiz. Beklendiği gibi, indüklenmiş yük negatif (q'yu pozitif kabul ederek) ve $x=y=0$'da en büyüktür.

Sırası gelmişken toplam indüklenmiş yükü de hesaplayalım.

$$Q=\int\sigma da$$

xy düzleminde alınacak bu integral, $da=dxdy$ ile kartezyen koordinatlarda alınabilir; fakat $r^2=x^2+y^2$ ve $da=rdrd\phi$ yazarak kutupsal koordinatlarda yapmak biraz daha kolaydır. O zaman

$$\sigma(r) = \frac{-qd}{2\pi\left(r^2+d^2\right)^{3/2}}$$

buluruz ve buradan

$$Q = \int_o^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{-qd}{2\pi\left(r^2+d^2\right)^{3/2}} r\,dr\,d\phi = \left.\frac{qd}{\sqrt{r^2+d^2}}\right|_0^{\infty} = -q \qquad (3.11)$$

elde edilir. Açıkça, düzlem üzerinde indüklenmiş toplam yük, sizin de kendinizi belki de öyle olması gerektiğine inandırabileceğiniz gibi, $-q$'dur.

3.2.3 Kuvvet ve Enerji

İndüklenmiş negatif yükten dolayı, q yükü düzleme doğru çekilir. O halde çekim kuvvetini hesaplayalım. q yakınındaki potansiyel benzeşmeli problemdeki ($+q$ ve $-q$'nun olduğu ve iletkenin olmadığı) ile aynı olduğundan, alan da onun alanıyla aynıdır ve bu yüzden kuvvet

$$\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2d)^2}\hat{z} \tag{3.12}$$

olur.

Dikkat: Dalıp gitmek ve iki problemde sanki herşey aynıymış gibi düşünmeye başlamak kolaydır. Ancak, enerji aynı değildir. İki nokta yük var ve iletkenin olmadığı halde, Denk. 2.42

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{2d} \tag{3.13}$$

verir. Fakat bir tek yük ve iletken düzlem varken enerji bunun yarısıdır:

$$W = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d} \tag{3.14}$$

Niçin yarısı? Alanlarda depolanan enerjiyi düşününüz (Denk. 2.45):

$$W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 d\tau$$

Birinci halde üst bölge $(z>0)$ ve alt bölge $(z<0)$ her ikisi birden katkı yapar -simetriden dolayı katkıları eşittir. Fakat ikinci halde yalnız üst bölge sıfır olmayan bir alan bulundurur ve bundan dolayı enerji öncekinin yarısı kadar büyüklüktedir.

Elbette enerjiyi q yükünün sonsuzdan buraya getirmek için gerekli işi hesaplayarak da bulabilirdik. Gerekli kuvvet (Denk. 3.12'deki elektrik kuvvetine karşı koymak için) $\left(1/4\pi\varepsilon_0\right)\left(q^2/4z^2\right)\hat{z}$'dir, böylece

$$W=\int_{\infty}^{d}\vec{F}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{d}\frac{q^2}{4z^2}dz$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{q^2}{4z}\right)_{\infty}^{d}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{4d}$$

bulunur. q'yu iletkene doğru hareket ettirdikçe yalnızca q üzerine iş yaparız. İndüklenmiş yükün iletken yüzeyinde içeriye doğru hareket ettiği doğrudur, fakat tüm iletken sıfır potansiyelde olduğundan dolayı bu hareket işe mal olmaz. Bunun zıddına olarak, eş zamanlı olarak iki nokta yükü bir araya getirirsek (arada iletken yokken), her ikisi üzerine de iş yaparız ve toplam iş iki kat daha büyük olur.

Triple Products

(1) $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$

(2) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

Product Rules

(3) $\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$

(4) $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A}$

(5) $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$

(6) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

(7) $\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)$

(8) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$

Second Derivatives

(9) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

(10) $\nabla \times (\nabla f) = 0$

(11) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$