BÖLÜM 8

Örnek 8.1

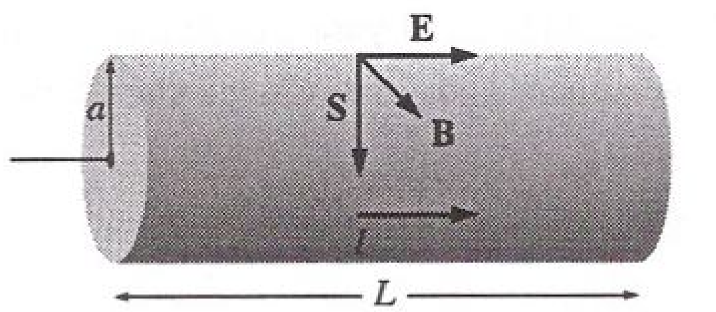
I akımı geçen R dirençli bir telde birim zamanda harcanan enerjiyi Poynting vektörüyle hesaplayın.

Çözüm:

Bir tel boyunca I akımı geçtiğinde elektromagnetik iş yapılır ve bu telin Joule ısısı şeklinde kendini gösterir (Denk. 7.7). Onu yapmanın elbette daha kolay yolları varsa da, birim zamanda tele aktarılan enerji Poynting vektörünü kullanarak hesaplanabilir. Elektrik alanın düzgün olduğunu kabul ederek, tele paralel olan alanın değeri

$$E = \frac{V}{L}$$

dir, burada V uçlar arasındaki potansiyel farkı ve L telin uzunluğudur (Şek. 8.1). Magnetik alan tel çevresinde dolanımlı yönde olup, yüzeydeki (yarıçap a) alan değeri



Şekil 8.1

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

olur. Buna göre, $\vec{E}$ ve $\vec{B}$ alanları birbirine dik olduğundan, yüzeyde Poynting vektörünün büyüklüğü

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

$$S = \frac{1}{\mu_0} EB = \frac{1}{\mu_0}\frac{V}{L}\frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{VI}{2\pi a L}$$

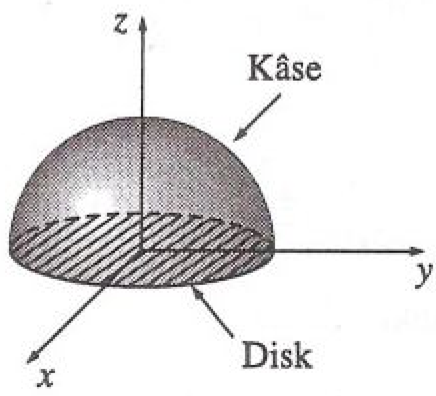
olup yarıçapsal olarak içeriye doğru yönelmiştir. Bu sebeple, telin yüzeyinden birim zamanda geçen enerji

$$\int \vec{S}.d\vec{a} = S\left(2\pi a L\right) = VI$$

olur, bu ise Kısım 7.1.1'de çok daha doğrudan yollardan vardığımız sonucun tamamen aynısıdır.

Örnek 8.2

R yarıçaplı ve Q yüklü düzgün yüklenmiş bir katı kürenin "kuzey" yarıküresi üzerine etkiyen kuvveti belirleyiniz (Problem 2.43 ile aynı problem, yalnızca bu kez Maxwell gerilme tensörünü ve Denk. 8.22'yi kullanacağız)



Şekil 8.4

Çözüm: Sınır yüzeyi iki kısımdan oluşmuştur. R yarıçaplı yarı küresel bir "kâse" ve $\theta = \pi/2$'de bulunan dairesel bir disk (Şek. 8.4), Kâse için

$$da = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \, \hat{r}$$

ve

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{r}$$

Kartezyen bileşenlerde,

$$\hat{r} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$$

Böylece

$$T_{zx} = \varepsilon_0 E_z E_x = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\theta \cos\phi$$

$$T_{zy} = \varepsilon_0 E_z E_y = \varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\theta \sin\phi \tag{8.23}$$

$$T_{zz} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2 - E_x^2 - E_y^2 \right) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta \right)$$

Net kuvvet apaçık z-yönündedir, böylece şunu hesaplamamız yeterlidir

$$\left(\vec{T} \cdot d\vec{a} \right)_z = T_{zx} da_x + T_{zy} da_y + T_{zz} da_z = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \right)^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

Bu sebeple "kâse" üzerindeki kuvvet

$$F_{\text{kâse}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \right)^2 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2} \tag{8.24}$$

olur. Bu arada, ekvatordaki disk için

$$d\vec{a} = -r dr d\phi \, \hat{z} \tag{8.25}$$

yazılabilir ve (şimdi kürenin içinde bulunduğumuz için)

$$\vec{r} = r\left(\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y} \right)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r\left(\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y} \right)$$

Böylece

$$T_{zz}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(E_z^2-E_x^2-E_y^2\right)=-\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r^2$$

ve buradan

$$\left(\overleftrightarrow{T}\cdot d\vec{a}\right)_z=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r^3 dr d\phi$$

Bu sebeple disk üzerindeki kuvvet

$$F_{disk}=\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 2\pi\int_0^R r^3 dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{16R^2} \tag{8.26}$$

olur. Denk. 8.24 ile 8.26'yı birleştirerek, kuzey yarı küre üzerindeki toplam kuvvetin

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{16R^2} \tag{8.27}$$

olduğu sonucuna varırız. Bu arada, Denklem 8.22'yi uygularken, göz önüne aldığımız yükün tümünü içine alan (ve başka yük bulundurmayan) herhangi bir hacim bu işi yapmaya yeterlidir. Örneğin, şimdiki halde tüm $z>0$ bölgesini kullanabilirdik. Bu durumda sınır yüzeyi tüm xy düzlemi (artı $r=\infty$'daki yarı küreden oluşur fakat, orada zaten $E=0$ olduğundan bir katkı gelmez). Kâse yerine şimdi düzlemin daha dış $\left(r>R\right)$ kısmını kullanalım. Burada

$$T_{zz} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

(Denk. 8.23'de$\theta = \pi/2$ ve $R \to r$ alarak) ve da Denk. 8.25 ile verilir, böylece

$$\left(\vec{T} \cdot d\vec{a}\right)_z = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^3} dr d\phi$$

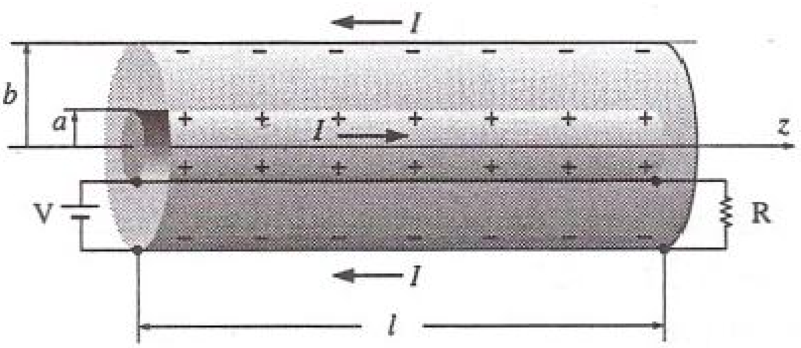
ve $r > R$ için düzlemden gelen katkı

$$\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\right)^2 2\pi \int_R^\infty \frac{1}{r^3} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8R^2}$$

bulunur, bu kâse için bulduğumuzla (Denk. 8.24 aynıdır.

Örnek 8 3

Uzunluğu l olan uzun bir eş eksenli kablo bir iç iletken (yarıçapı a) ile bir dış iletkenden (yarıçapı b) oluşmuştur. Bir ucuna bir batarya bağlanmış ve diğer ucuna da bir direnç bağlanmıştır (Şek. 8.5). İç iletken birim uzunlukta düzgün λ yükünü ve sağa doğru kararlı bir I akımını taşımaktadır; dış iletken zıt yüke ve akıma sahiptir. Alanlarda depolanan elektromagnetik momentum nedir?



Şekil 8.5

Çözüm: Alanlar

$$\vec{E}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{s}\hat{s} \qquad \vec{B}=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{s}\hat{\phi}$$

ile verilir. Bu yüzden Poynting vektörü

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$$

$$\vec{S}=\frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0 s^2}\hat{z}$$

dir. Enerji hat boyunca bataryadan dirence akmaktadır. Gerçekte taşınan güç, olması gerektiği gibi

$$P=\int\vec{S}.d\vec{a}=\frac{\lambda I}{4\pi^2\varepsilon_0}\int_a^b\frac{1}{s^2}2\pi s ds=\frac{\lambda I}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(b/a\right)=VI$$

olarak verilir.

Alanlardaki momentum şöyle verilir,

$$\vec{p}_{em}=\mu_0\varepsilon_0\int\vec{S}.d\tau=\frac{\mu_0\lambda}{4\pi^2\varepsilon_0}\hat{z}\int_a^b\frac{1}{s^2}l\,2\pi s ds=\frac{\mu_0\lambda Il}{2\pi}\ln\left(b/a\right)\hat{z}$$

Bu hayret verici bir sonuçtur. Kablo hareket etmiyor, alanlar durgundur ve yine de sistemde momentum bulunduğuna inanmanız isteniyor. Gerçekte, yerelleşmiş bir sistemin kütle merkezi hareketsizse, onun toplam momentumu sıfır olmalıdır. Bu durumda akımın akışına eşlik eden "gizli" mekanik momentumun bulunduğu anlaşılır ve bu tam olarak alanlardaki momentumu yok eder. Fakat gizli momentumu belirlemek kolay değildir ve o gerçekte göreli bir etkidir.

Şimdi direnci devreye sokalım, böylece akım azalır. Değişen magnetik alan bir elektrik alan indükleyecektir (Denk. 7.19);

$$\vec{E}=\left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln s+K\right]\hat{z}$$

Alanlar $\pm\lambda$ üzerine bir kuvvet uygular:

$$\vec{F}=\lambda l\left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln a+K\right]\hat{z}-\lambda l\left[\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln b+K\right]\hat{z}=-\frac{\mu_0\lambda l}{2\pi}\frac{dI}{dt}\ln\left(b/a\right)\hat{z}$$

Akım I'dan 0'a düştüğünde kabloya aktarılan toplan momentum, bu sebeple,

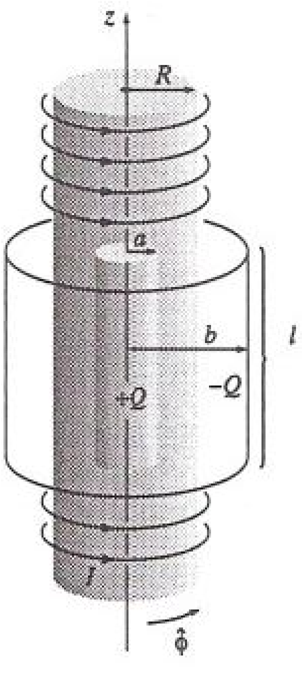
$$\vec{p}_{mek}=\int\vec{F}dt=\frac{\mu_0\lambda Il}{2\pi}\ln\left(b/a\right)\hat{z}$$

ile verilir bu ise tam olarak ilk baştan alanlarda depolanan momentuma eşittir.

(Ancak gizli momentumun eş zamanlı olarak yok olmasıyla aktarılan eşit ve zıt itmeden dolayı kablo geri tepmeyecektir.)

Örnek 8.4

R yarıçaplı birim uzunluğunda n sarım bulunan ve I akımı taşıyan çok uzun bir solenoid düşününüz. Solenoid ile eş eksenli olarak l uzunluklu iki uzun silindirik kabuk vardır. Biri, solenoidin içinde a yarıçaplı ve yüzeyi üzerine düzgün olarak dağılmış $+Q$ yükünü taşımaktadır diğeri ise solenoidin dışında b yarıçaplı olup $-Q$ yükü taşımaktadır (bakınız Şek. 8.7; l'nin b'den çok daha büyük olduğu varsayılmaktadır.). Solenoiddeki akım yavaşça azaltıldığında, Örnek 7.8'de bulduğumuz gibi, silindirler dönmeye başlar. Soru: Açısal momentum nereden gelir?



Şekil 8.7

Çözüm: O ilk baştan alanlarda depo edilmişti. Akım kesilmeden önce silindirler arasındaki bölgede bir

$$\vec{E}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\frac{1}{s}\hat{s} \quad (a<s<b)$$

elektrik alan vardı ve solenoid içinde de bir

$$\vec{B}=\mu_0 nI\,\hat{z} \quad (s<R)$$

magnetik alanı vardı. Bu yüzden $a<s<R$ bölgesinde bir momentum yoğunluğu (Denk. 8.33) $\vec{\mathcal{P}}_{em}=\mu_0\varepsilon_0\vec{S}=\varepsilon_0\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)$

$$\vec{\mathcal{P}}_{em}=-\frac{\mu_0 nIQ}{2\pi ls}\hat{\phi}$$

idi. Açısal momentum yoğunluğu da

$$\vec{l}_{em}=\vec{r}\times\vec{\mathcal{P}}_{em}=-\frac{\mu_0 nIQ}{2\pi l}\hat{z}$$

idi ve görüldüğü gibi sabittir; alanlardaki toplam açısal momentumu bulmak için, basitçe hacimle çarparız, $\pi\left(R^2-a^2\right)l$:

$$\vec{L}_{em}=-\frac{1}{2}\mu_0 nIQ\left(R^2-a^2\right)\hat{z} \tag{8.35}$$

Akım kesildiği zaman, değişen magnetik alan Faraday yasasıyla verilen çevresel bir elektrik alan indükler:

$$\vec{E}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\mu_0 n\frac{dI}{dt}\frac{R^2}{s}\hat{\phi} & (s>R)\\ \\ -\frac{1}{2}\mu_0 n\frac{dI}{dt}s\,\hat{\phi} & (s<R)\end{cases}$$

Böylece dış silindir üzerindeki tork

$$\vec{N}_b=\vec{r}\times\left(-Q\vec{E}\right)=\frac{1}{2}\mu_0 nQR^2\frac{dI}{dt}\hat{z}$$

dir ve dış silindirin kazandığı açısal momentum şöyle verilir.

$$\vec{L}_b=\frac{1}{2}\mu_0 nQR^2\hat{z}\int_I^0\frac{dI}{dt}dt=-\frac{1}{2}\mu_0 nIQR^2\hat{z}$$

Benzer şekilde, iç silindir üzerindeki tork

$$\vec{N}_a=-\frac{1}{2}\mu_0 nQa^2\frac{dI}{dt}\hat{z}$$

dır ve kazandığı açısal momentum artışı da

$$\vec{L}_a=\frac{1}{2}\mu_0 nIQa^2\hat{z}$$

kadardır. $\vec{L}_{em}=\vec{L}_a+\vec{L}_b$ Alanlar tarafından kaybedilen açısal momentum tam olarak silindirler tarafından kazanılan açısal momentuma eşittir ve toplam açısal momentum (alanlar artı madde) korunmuştur. Bu arada açısal hal bazı bakımlardan doğrusal haldeki benzeşmeye göre daha açıktır (Örnek 8.3), çünkü alanlardaki açısal momentumu dengelemek için gerekli bir "gizli" açısal momentum yoktur ve magnetik alan kapatıldığında silindirler gerçekten dönerler. Bir yerelleşmiş sistem hareket etmiyorsa, onun toplam doğrusal momentumu sıfır olmak zorundadır, fakat açısal momentum için buna karşılık gelen bir teorem yoktur ve Problem 8.12'de hiç bir şeyin hareket etmediği -hatta akımların bile olmadığı ve yine de açısal momentumun sıfırdan farklı olduğu güzel bir örnek göreceksiniz.