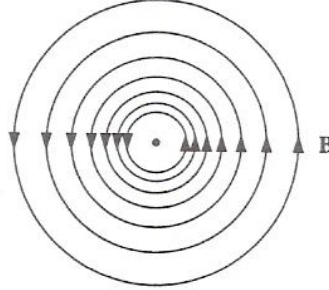


5.3 MAGNETİK ALANIN DİVERJANS VE ROTASYONELİ

5.3.1 Doğrusal Akımlar

Sonsuz doğrusal bir akımın magnetik alan çizgileri Şek.5.27’de gösterildiği gibidir. Yine, çizgilerin sıklığı alan şiddetini temsil eder. Burada \vec{B} alanı uzaklıkla ters orantılı olduğundan, merkezden uzaklaştıkça çizgiler seyrekleşir. Bu şekle baktığımızda, bu alanın diverjansının sıfır olacağını, ama rotasyanelin sıfırdan farklı olacağını tahmin edebilirsiniz.

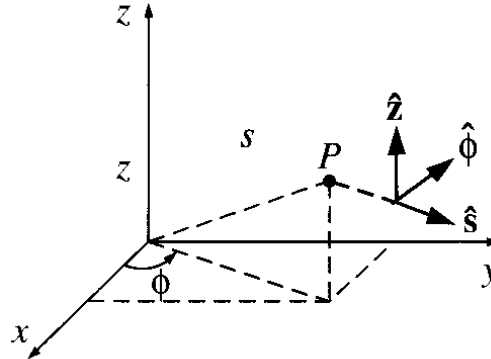


Şekil 5.27

\vec{B}' 'nin s yarıçaplı bir çember üzerindeki eğrisel integralini hesaplayalım. Magnetik alan (5.36) formülünden alınırsa

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right) dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} 2\pi s = \mu_0 I$$

Sonuç s' 'den bağımsızdır, çünkü B alanı $1/s$ gibi azalırken, çemberin çevresi s gibi artıyor. Aslında, eğriyi çember seçmek gerekmez: Teli çevreleyen her kapalı eğri aynı sonucu verir. (s, ϕ, z) silindirik koordinatları kullanırsak ve akımı z -yönünde alırsak



$$x = s \cos \phi, \quad y = s \sin \phi, \quad z = z$$

$$dl_s = ds, \quad dl_\phi = s d\phi, \quad dl_z = dz$$

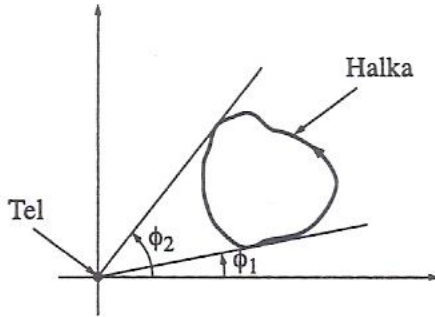
$$d\tau = s ds d\phi dz$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} \tag{5.41}$$

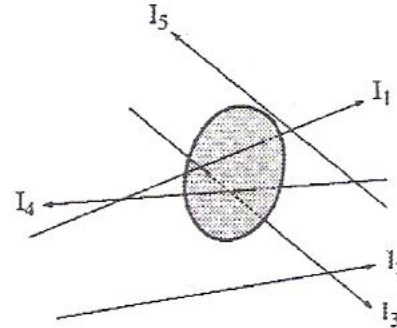
olduğundan ve $d\vec{l} = ds\hat{s} + s d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$ yazarsak

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} \right) \cdot (ds\hat{s} + s d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int \frac{1}{s} s d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \mu_0 I$$

bulunur. Burada eğrinin tel çevresinde bir kez dolandığı varsayıldı; iki kez dolansaydı ϕ açısı 0'dan 4π 'ye değişirdi; keza, eğri telin çevresinde dolanmıyorsa ϕ açısı $[\phi_1, \phi_2]$ aralığında gidiş geliş yaptığından $\int d\phi = 0$ olurdu (Şek.5.28).



Şekil 5.28



Şekil 5.29

Şimdi bir doğrusal akımlar demeti göz önüne alalım. Seçtiğimiz kapalı eğri içinde kalan akımlar integrale $\mu_0 I$ kadar bulunurken, eğri dışında kalan akımlar bir katkıda bulunmazlar (Şek.5.29). Buna göre, eğrisel integral sonucu şöyle olur:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{iç} \quad (5.42)$$

Burada $I_{iç}$ eğri içinde kalan net akımdır. Yük akışı hacimsel bir \vec{J} akım yoğunluğuyla verilmişse, eğri içinde kalan akım miktarı

$$I_{i\zeta} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a} \quad (5.43)$$

olur; integral eğrinin sınırladığı yüzey üzerinde alınır. Stokes teoremini (5.42) denklemine uygularsak

$$\int_{\text{yüzey}} \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) d\hat{a} = \int_{\text{çizgisel}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad \text{Stokes teoremi}$$

$$\int \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \cdot d\hat{a} = \mu_0 \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

olur ve buradan integrandların eşitliği çıkar:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.44)$$

Burada ispat sonsuz doğrusal akımlar için yapılmıştır. Doğrusal tel yaklaşıklığına uymayan birçok akım dağılımı vardır ve (5.44) formülünün bunlara da uyduğunu söyleyemeyiz. O halde, \vec{B} nin diverjans ve rotasyonelinin en genel matematik ispatına girelim.

5.3.2 \vec{B} 'nin Diverjans ve Rotasyoneli

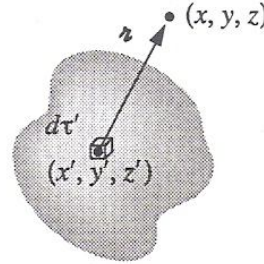
Genel bir hacimsel akım olduğu için Biot-Savart yasasından başlayalım.

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(r') \times \hat{r}}{r^2} d\tau' \quad (5.45)$$

NOT: burada $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$ olduğunu dikkate alırsak

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(r') \times \vec{r}}{r^3} d\tau'$$

Bu formül $r(x,y,z)$ noktasındaki magnetik alanı, $\vec{J}(x',y',z')$ akım yoğunluğunun integrali olarak verir (Şek.5.30).



Şekil 5.30

Yola çıkmadan önce her şeyi açıkça belirtelim:

\vec{B} alanı (x,y,z) 'nin bir fonksiyonudur

\vec{J} akım yoğunluğu (x', y', z') 'nin fonksiyonudur

$$\vec{r} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$$

$$d\tau' = dx' dy' dz'$$

İntegral (x', y', z') koordinatlarına göre alınmaktadır; diverjans ve rotasyonel (x, y, z) koordinatlarına göre hesaplanacaktır. (5.45)

denklemine diverjans teoremini uygularsak

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau' \quad (5.46)$$

veya

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\tau'$$

Vektör operatör çarpımlarındaki 6. kuralı hatırlayalım:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{J}) - \vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (5.47)$$

\vec{J} Vektörü (x, y, z) değişkenlerine bağlı olmadığından $\vec{\nabla} \times \vec{J} = 0$ olur

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\vec{J} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

olur. Not:: Vektör operatör çarpımlarındaki 7. kuralından

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f(\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{\nabla} f)$$

yararlanırsak

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} (\vec{\nabla} \times \vec{r}) - \vec{r} \times \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x-x') & (y-y') & (z-z') \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{r} &= \hat{x} \left[\frac{\partial}{\partial y} (z - z') - \frac{\partial}{\partial z} (y - y') \right] \\
&+ \hat{y} \left[\frac{\partial}{\partial z} (x - x') - \frac{\partial}{\partial x} (z - z') \right] \\
&+ \hat{z} \left[\frac{\partial}{\partial x} (y - y') - \frac{\partial}{\partial y} (x - x') \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} = 0 \text{ ve } \vec{\nabla} \times \frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{r} \times \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) = -\vec{r} \times \left(-\frac{3\hat{r}}{r^4} \right) = -\vec{r} \times \left(-\frac{3\vec{r}}{r^5} \right) = 3 \left(\frac{\vec{r} \times \vec{r}}{r^5} \right) = 0$$

Buradan diverjans,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{5.48}$$

olarak bulunur: Bu kez (5.45) $\left[\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} d\tau' \right]$ denkleminin

rotasyonelini alalım:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d\tau' \quad (5.49)$$

İntegrandı açmak için 8. çapım kuralı kullanılır:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \overbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{\nabla} \right)}^{sabit=0} \vec{J} - \left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{J} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - \frac{\vec{r}}{r^3} \overbrace{\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right)}^{kararlıakmlariçin=0}$$

(Bu \vec{J} 'nin türevi olan terimleri yazmadım, çünkü \vec{J} vektörü (x, y, z) koordinatlarına bağlı değildir.)

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \underbrace{\vec{J} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right)}_1 - \underbrace{\left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla} \right) \frac{\vec{r}}{r^3}}_2 \quad (5.50)$$

1 ve 2 numaralı bölümleri ayrı ayrı bulalım;

$\vec{\nabla}$ 'dan $\vec{\nabla}'$ 'ye geçiş yaparken x 'den x' 'ye gittik. Bu durumda $r = x - x'$ oldu.

$$\int_{\text{hacim}} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) d\tau = \int_{\text{yüzey}} \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

idi. Diverjans teoremine göre;

$$\int_{\text{hacim}} \left[\vec{\nabla} \left(\frac{x-x'}{r^3} \right) \cdot \vec{J} \right] d\tau = \int_{\text{yüzey}} \frac{x-x'}{r^3} \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

olur. \vec{J} hacimsel akım yoğunluğu yüzey üzerinde sıfır olacağından $\left(\vec{J}=0 \right)$ yüzey integrali sıfır olur. Birinci terim, Bölüm 1' de özellikle vurguladığımız bir diverjans idi; sonucu burada hatırlatalım:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = 4\pi\delta^3(r) \quad (5.51)$$

Bu bağıntı kullanılırsa

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \vec{J}(r') 4\pi\delta^3(r-r') d\tau' = \mu_0 \vec{J}(r)$$

olur. Bu sonuç (5.44) formülünün sadece doğrusal akımlarla sınırlı olmadığını, magnetostatikğin temel bir denklemi olduğunu gösterir.

İspatı tamamlamak için (5.50) denklemindeki ikinci terimin integralinin sıfır olduğunu göstermemiz gerekiyor. Türev işlemi sadece

sağındaki \vec{r}/r^3 terimine etkimektedir. Buradaki bağımlılık $\vec{r} = (\vec{r} - \vec{r}')$ şeklinde olduğundan $\vec{\nabla}$ türevi yerine $\vec{\nabla}'$ türevine geçerse, bir eksi işaret gelir:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}(x, y, z) &\rightarrow \vec{\nabla}'(x', y', z') \\ -\left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{r}}{r^3} &= \left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}'\right) \frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}\tag{5.52}$$

5. çapım kuralı kullanılırsa;

$$\vec{\nabla} \cdot (f \vec{A}) = f(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} f)$$

Bu ifadeyi indirgemek üzere, sadece x' bileşenine bakalım:

$$\begin{aligned}
 -\left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{r}}{r^3} &= \left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}'\right) \frac{\vec{r}}{r^3} \\
 &= \left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}'\right) \left(\frac{x-x'}{r^3}\right) = \vec{\nabla}' \left(\frac{x-x'}{r^3} \cdot \vec{J}\right) - \left(\frac{x-x'}{r^3}\right) \overbrace{\left(\vec{\nabla}' \cdot \vec{J}\right)}^{\text{kararlı akımlar için}=0}
 \end{aligned}$$

Şimdi kararlı akımlar için \vec{J}' 'nin diverjansının sıfır olduğunu [(5.31) denklemi] hatırlayalım: $\vec{\nabla}' \cdot \vec{J} = 0$. Buna göre

$$\left[-\left(\vec{J} \cdot \vec{\nabla}\right) \frac{\vec{r}}{r^3} \right]_x = \vec{\nabla}' \left[\left(\frac{x-x'}{r^3}\right) \cdot \vec{J} \right]$$

Bu bileşenin (5.49) integraline katkısına bakalım ve diverjans teoremini kullanalım:

$$\int_{\text{hacim}} \vec{\nabla}' \cdot \left[\frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \right] = \oint_{\text{yüzey}} \frac{(x-x')}{r^3} \vec{J} \cdot d\vec{a}' \quad (5.53)$$

$\vec{\nabla}$ türevinden $\vec{\nabla}'$ türevine geçmemizin nedeni, burada diverjans teoremini uygulayabilmek içindi. Yaptığımız iş bir çeşit kısmi integrasyondur. \vec{r}/r^3 üzerindeki türevi \vec{J} üzerine atmış olduk. Bu integrali hangi yüzey üzerinde alıyoruz? (5.45) Biot-Savart yasasındaki tüm akım yoğunluklarını içine alan yüzey üzerinden. İsterseniz daha da

büyük bir yüzey alabilirsiniz, nasılsa daha dışarıda $\vec{J}=0$ olacağından, integrale katkıda bulunmaz. Önemli olan nokta, tüm akımları çerçeveleyen yüzey üzerinde akımın sıfır olduğudur: $\vec{J}=0$. Buna göre, (5.53) yüzey integrali sıfır olur.

5.3.3 Ampere Yasası ve Uygulamaları

\vec{B} 'nin rotasyoneli için bulduğumuz

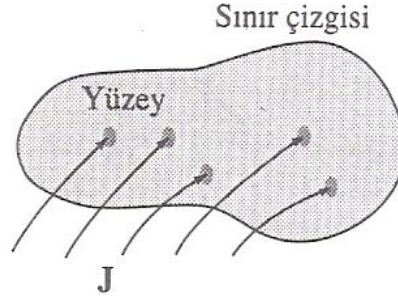
$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (5.54)$$

denklemini **Ampere yasasının** diferansiyel ifadesi olur. Bunun integral ifadesini elde etmek için Stokes teoremi uygulanır:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot d\vec{a} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

Burada $\int \vec{J} \cdot d\vec{a}$ yüzeyden geçen toplam akım (Şek.5.31) olup $I_{i\check{c}}$ ile göstermiştik(**amper halkası** tarafından **çevrelenen akım**). Buna göre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{i\check{c}} \quad (5.55)$$



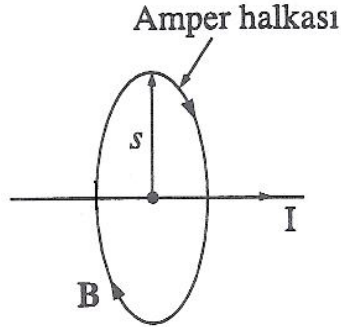
Şekil 5.31

Ampere yasasının integral ifadesi olur ve (5.42) denklemini tüm magnetostatiğe genelleştirir. Elektrostatikte **Gauss yasasının** oynadığı rolü, magnetostatikte **Ampere yasası** üstlenir. Özellikle, akım dağılımı simetrik ise, magnetik alanı bulmakta en kestirme yoldur.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Durgun elektrik:} & \text{Coulomb} \rightarrow \text{Gauss} \\ \text{Durgun magnetizma:} & \text{Biot-Savart} \rightarrow \text{Ampere} \end{array} \right.$$

Gauss yasası gibi Ampere yasası da kararlı akımlar için her zaman doğrudur, fakat her zaman kullanışlı olmayabilir. Problemin simetrisi $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ integralinden \vec{B} 'yi dışarı almanıza olanak veriyorsa o zaman manyetik alanı Ampere yasası ile hesaplayabiliriz. Diğer durumda Biot-Savart yasası kullanılır.

Örnek 5.7: Sabit I akımı geçen sonsuz doğrusal telden s uzaklıkla magnetik alanı bulun. (Bu problemi Örnek 5.5'te Biot-Savart yasasıyla çözmüştük.)



Şekil 5.32

Şekil 5.32'de gösterilen \vec{B} alanının tel çevresinde "dolanımlı" yönde olduğunu biliyoruz. Tel çevresinde s yarıçaplı bir "Ampere çevrimi" alırsak, simetriye göre bu eğri üzerinde \vec{B} alanı sabit büyüklükte olacaktır. Ampere yasasına göre

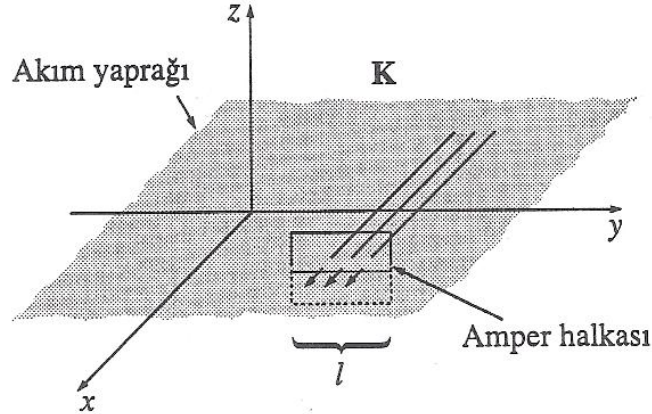
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint dl = B 2\pi s = \mu_0 I_{i\check{c}} = \mu_0 I$$

veya,

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

Bu yanıtı daha önce (5.36) denklemi olarak bulunmuştu; Ampere yasası daha kolay sonuç verir.

Örnek 5.8: xy -düzlemini tümüyle kaplayan düzgün bir yüzey akım yoğunluğu $\vec{K} = K\hat{x}$ olarak veriliyor (Şek. 5.33). Magnetik alanı bulun.



Şekil 5.33

Çözüm: Önce " \vec{B} magnetik alanı hangi yönde olur?" diye bir düşünelim. x -bileşeni olabilir mi? *Hayır:* Biot-Savart yasasının (5.39)

$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(r') \times \hat{r}}{r^2} da'$ ifadesine bakarsak, magnetik alanın \vec{K} vektörüne **dik** olması gerekir. Peki z bileşeni olabilir mi? *Yine hayır.* Çünkü +y tarafındaki her ince şeridin magnetik alana düşey yöndeki katkısı, buna -y tarafında karşılık gelen şeridin katkısıyla sıfırlanacaktır. Ama daha güzel bir gerekçe var: Magnetik alanın düzlemden **dışarı** yönde olduğunu varsayalım. Akım yönünü tersine çevirdiğimde, magnetik alanı düzlemin **içine** doğru çevirmiş olurum (Biot-Savart yasasında akımın işareti değişirse magnetik alan da işaret değiştirir). Fakat \vec{B} 'nin z-bileşeni xy-düzlemindeki bir akımın yönüne

bağlı olamaz. O halde, \vec{B} ancak y-yönünde olabilir. Sağ el kuralını uygularsak, düzlemin üstünde *sola*, düzlemin altında ise *sağa* doğru olduğu görülebilir.

Bunu açığa kavuşturduktan sonra, şekilde gösterildiği gibi, dikdörtgen şeklinde bir Ampere çevrimi alalım. Dikdörtgen yz-düzlemi içinde ve $z=0$ düzleminin iki yanında eşit genişlikte olsun. Ampere yasasına göre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2Bl = \mu_0 I_{i\check{c}} = \mu_0 Kl$$

olup $B = (\mu_0/2)K$ bulunur. Daha açık ifadeyle

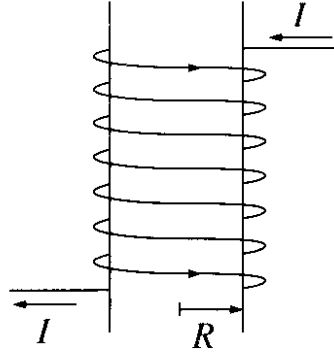
$$\vec{B} = \begin{cases} +(\mu_0/2)K\hat{y} & z < 0 \text{ için} \\ -(\mu_0/2)K\hat{y} & z > 0 \text{ için} \end{cases} \quad (5.56)$$

olur. Tıpkı düzlem levhanın elektrik alanı gibi, düzgün yüzey akımının magnetik alanı uzaklıktan bağımsızdır.

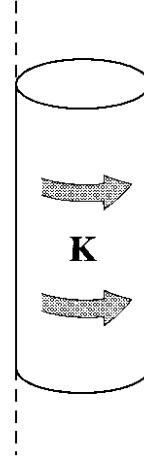
Örnek 5.9:

I akımı geçen ve R yarıçaplı silindir üzerine sıkıca sarılmış sonsuz solenoidin birim uzunluğunda n sarım vardır. Solenoidin içinde ve dışında magnetik alanı bulun (Şek. 5.34). (Not: Sarımın sıkı olmasındaki amaç herbir sarımı çember gibi düşünebilmek içindir.

Buna eşdeğer olarak, Şek. 5.35'de gösterilen $K = nI$ kadar düzgün yüzey akımı alınabilir.)



Şekil 5.34

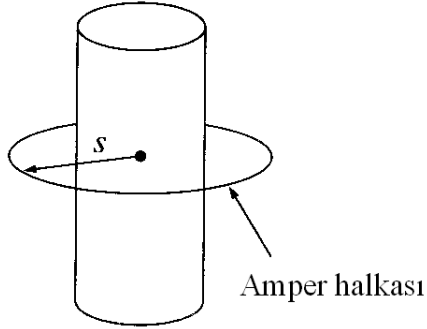


Şekil 5.35

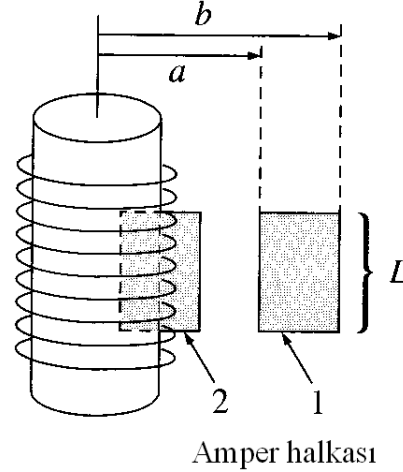
Çözüm :Yine, \vec{B} alanı hangi yönde olabilir? sorusuyla başlayalım. Radyal bileşeni olabilir mi? Hayır. Eğer pozitif bir B_s bileşeni olsaydı, akım yönünü tersine çevirdiğimizde B_s negatif olurdu. Fakat I akımını tersine çevirmek, solenoidi fiziksel olarak tersine çevirmeye eşdeğerdir ve bu, radyal magnetik alanı değiştiremez. Peki "dolanımlı" bir bileşeni olabilir mi? Hayır. Çünkü, bu takdirde B_s bileşeni, Şek. 5.36'daki Ampere çevrimi üzerinde sabit olurdu; Ampere yasasına göre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\phi (2\pi s) = \mu_0 I_{iç} = 0$$

olurdu, çünkü bu çevrim içinde kalan net akım sıfırdır.



Şekil 5.36



Şekil 5.37

O halde, sonsuz solenoidin magnetik alanı *eksene paralel* olur. Öte yandan, sağ el kuralına göre, solenoid içindeki magnetik alan *yukarı*

yönde, dışında ise **aşağı** yönde olmalıdır. Buna göre, Şek. 5.36'daki gibi seçilen iki Ampere çevrimi üzerinde Ampere yasasını uygulayalım. **1.çevrim** tümüyle solenoit dışında olup, kenarları eksenden a ve b uzaklıktadır:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B(a) - B(b)] = \mu_0 I_{i\check{c}} = 0$$

Solenoit dışındaki alan eksenden uzaklığa bağımlı değildir. Fakat, $r \rightarrow \infty$ olduğunda magnetik alanın sıfır olması gerekir. O halde, dışarda magnetik alan **her yerde** sıfırdır. **2.çevrime** gelince, bu çevrimin yarısı içerde yarısı dışarıdadır. Ampere yasasına göre

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL = \mu_0 I_{i\check{c}} = \mu_0 nIL$$

(Dışarda $B=0$ olduğundan çevrimin sağ kenarı katkıda, bulunmaz.)

Sonuç olarak

(5.57)

solenoit içinde magnetik alanın düzgün oluşu, elektrostatikte düzlem kapasitörle benzerlik gösterir.

Gauss yasası gibi, Ampere yasası da kararlı akımlar için her zaman doğrudur; fakat her zaman kullanışlı olmayabilir. Eğer problemin

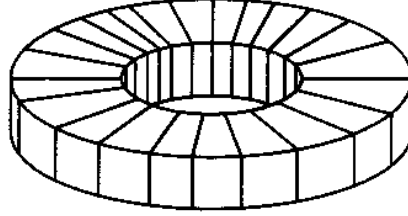
simetrisi $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ integralinden \vec{B} 'yi dışarı almanıza olanak veriyorsa, o zaman magnetik alanı Ampere yasasıyla hesaplayabilirsiniz. Diğer durumlarda Biot.-Savart yasasını kullanmamız gerekiyor. **Ampere yasası**nın kullanılabileceği standart akım dağılımları şöyle özetlenebilir:

- 1.Sonsuz doğrusal akımlar (Örnek 5.7);
- 2.Sonsuz düzlem akımları (Örnek 5.8);
- 3.Sonsuz solenoit (Örnek 5.9);

4.Toroit (Örnek 5.10)

Toroit, Ampere yasasının uygulanabildiği ilginç bir durumdur. Şimdi buna bakalım.

Örnek 5.10:Toroit. Bir toroit bobini "**simit**" şeklinde bir halka üzerine sıkıca sarılmış toplam **N** sayıda telden oluşur (**Şek. 5.38**). Kesitin şekli önemli değildir, **Şekil 5.39**'daki gibi asimetrik olabilir. Toroit içinde ve dışında magnetik alanın "dolanımlı" yönde olduğunu gösterin.



Şekil 5.38

Ispat : Biot-Savart yasasına göre r' noktasındaki akım elemanından dolayı r 'deki alan

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{I} \times \hat{r}}{r^3} dl'$$

dür. Aynı zamanda r' 'yi xz düzlemine de koyabiliriz(Şek. 5.39), böylece kartezyen bileşenleri (x,o,z) olur, kaynağın koordinatları ise

$$\vec{r}' = (s' \cos \phi', s' \sin \phi', z')$$

dır. O zaman

$$\hat{r} = (x - s' \cos \phi', -s' \sin \phi', z - z')$$

Akımın ϕ bileşeni olmadığından $\vec{I} = I_s \hat{s} + I_z \hat{z}$ veya (kartezyen koordinatlarda)

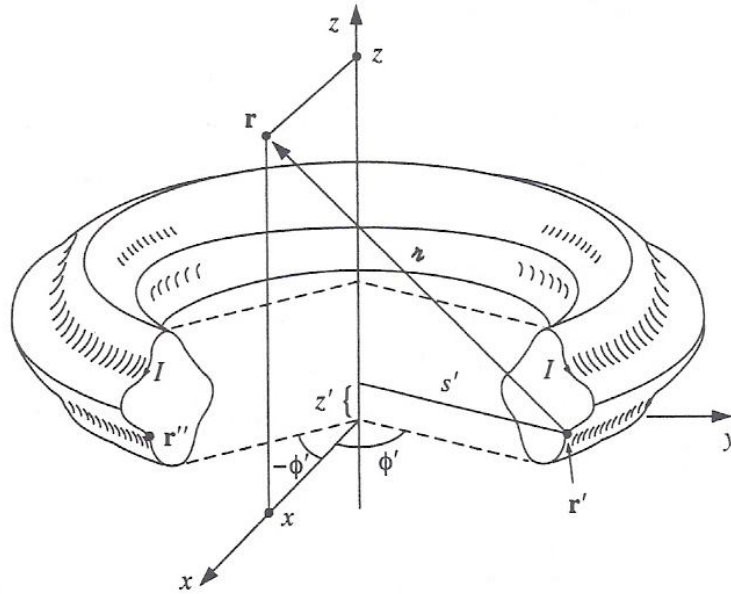
$$\vec{I} = (I_s \cos \phi', I_s \sin \phi', I_z)$$

Buna göre

$$\begin{aligned} \vec{I} \times \hat{r} &= \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ I_s \cos \phi' & I_s \sin \phi' & I_z \\ x - s' \cos \phi' & -s' \sin \phi' & z - z' \end{bmatrix} \\ &= \left[\sin \phi' (I_s (z - z') + s' I_z) \right] \hat{x} + \\ &\quad \left[I_z (x - s' \cos \phi') - I_s \cos \phi' (z - z') \right] \hat{y} + \left[I_s x \sin \phi' \right] \hat{z} \end{aligned}$$

olur. Fakat aynı s' , aynı r , aynı dl' , aynı I_s ve aynı I_z 'e sahip fakat negatif ϕ' değerine sahip olan r'' 'de simetrik olarak yerleşmiş bir akım elemanı vardır(Şek. 5.39). $\sin\phi'$ işaret değiştirdiğinden dolayı r' ve r'' 'den gelen \hat{x} ve \hat{z} katkıları birbirini yok eder, yalnızca bir \hat{y} terimi kalır. Böylece r' 'deki alan \hat{y} yönündedir ve genelde alan $\hat{\phi}$ yönüne yönelmiştir.

Şimdi alanın çevresel olduğunu biliyoruz, onun büyüklüğünü belirlemek Ampere yasasıyla kolayca bulunur. Merkezi toroit ekseninde olan s yarıçaplı bir Ampere çevrimi seçilirse



Şekil 5.39

$$B(2\pi s) = \mu_0 I_{iç}$$

ve buradan

$$\vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 NI}{2\pi s} & \text{sarımların içindeki noktalarda} \\ 0 & \text{sarımların dışındaki noktalarda} \end{cases}$$

Burada N sarımların toplam sayısıdır.

5.3.4 Magnetostatik ve Elektrostatik Karşılaştırması

Elektrostatik alanın diverjans ve rotasyoneli şöyleydi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ (Gauss yasası)} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \quad (\text{Adı yok}) \end{array} \right.$$

Bu iki bağıntı elektrostatik **Maxwell denklemleri**dir, ρ yük yoğunluğu verilmişse, yüklerden çok uzakta $\vec{E} \rightarrow 0$ koşulunu da kullanarak, iki denklemden elektrik alan bulunabilir. Bu iki denklem, Coulomb yasası ve toplanabilirlik ilkesine eşdeğer olurlar.

Magnetostatik alanın diverjans ve rotasyoneli şöyleydi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{Adı yok}) \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \quad (\text{Ampere yasası}) \end{array} \right.$$

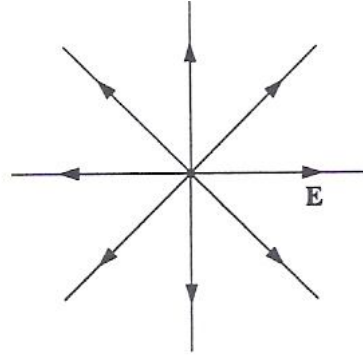
Bunlar da magnetostatiğin **Maxwell denklemleri** olurlar. Yine, akımlardan çok uzakta $\vec{B} \rightarrow 0$ koşuluyla birlikte, iki denklem magnetik alanı bulmaya yeterlidir. Biot-Savart yasasındaki bilgiye eşdeğerdirler.

Maxwell denklemleri

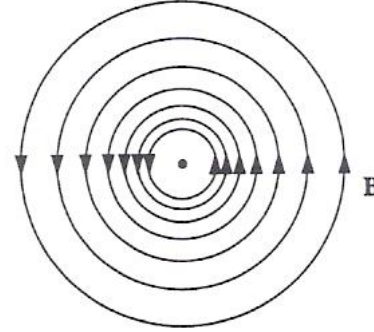
$$\vec{F} = Q \left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right]$$

olan Lorentz kuvvetiyle birlikte elektrostatik ve magnetostatik'in temel yasalarını en güzel şekilde ifade ederler.

Elektrik alan çizgileri **pozitif yükten ıraksar**; magnetik alan çizgileri **akım çevresinde dolandır** (Şek. 5.44). Elektrik alan çizgileri pozitif yükten başlar, negatif yükte biter; magnetik alan çizgileri hiçbir yerden başlamaz veya bitmez; ya kapalı bir eğri oluşturur, ya da sonsuza giderler.



(a) Bir nokta yükün
durgun elektrik alanı



(b) Uzun bir telin
durgun magnetik alanı

Şekil 5.44

Başka bir deyişle \vec{E} alanının tersine (\vec{B} alanı için **noktasal bir kaynak yoktur**) elektrik yükün magnetik karşılığı yoktur. $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ ifadesinin

fiziksel anlamı budur, (Coulomb ve diğer öncüler **magnetik monopol** denilen **"magnetik yük"**ün varlığına inanıyorlardı; hatta bazı eski kitaplarda magnetik kuvvet için Coulomb yasası benzeri ifadeler bulabilirsiniz. Tüm magnetik etkilerin elektrik yüklerin hareketinden kaynaklandığı fikrini ilk ortaya atan Ampere oldu. Günümüzdeki anlayışa göre Ampere hala haklı görünüyor. Ancak, doğada magnetik monopollerin var olup olmadığı deneysel bir araştırma konusudur. Eğer magnetik monopol var ise, henüz bulunamadığına göre sayıca az olmalıdır; aslında yeni parçacık fiziği teorilerine göre **var olması gerekir**.

Klasik elektromagnetik teoride $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, yani magnetik monopol yoktur.

O halde, hareket eden bir yük magnetik alan oluşturabilir ve bundan etkilenen diğer yük de hareketli olmalıdır. Kaynak yük hareketsiz ise $(\vec{B}=0)$ veya test yükü hareketsiz ise $(\vec{v}=0)$, Lorentz kuvveti $\vec{F} = Q\vec{E}$ şeklinde basitleşir.

Tipik olarak elektriksel kuvvetler magnetik kuvvetlerden daha büyük mertebede olurlar. Bunu teoriye bakarak göremezsiniz, evrensel ϵ_0 ve μ_0 sabitlerinin büyüklükleri bundan sorumludur. Ancak yüklerin hızı ışık hızına yaklaştığında magnetik kuvvetler elektrik kuvvetlerle

aynı mertebede olurlar. Buna rağmen, nasıl oluyor da magnetik etkileri gözleyebiliyoruz? Çünkü hem Biot-Savart yasasında ve hem de Lorentz kuvvetinde esas olan akımdır. Hızlar küçük olsa da, telden geçen yük miktarı o kadar büyüktür ki hızın küçük oluşunu karşılar. Yükün fazla oluşu büyük bir elektrik alan oluşturabilirdi, ama telde eşit ve zıt miktarda pozitif yük bulundurarak telin **nötr** olmasını sağlarsak, **elektrik alan** oluşmaz ve magnetik alan tek başına gözlenir. Bu fazla karmaşık gibi gelebilir, ama günlük yaşamda akım geçen tellerde olan biten budur.

Magnetostatik ve Elektrostatik'in Karşılaştırılması(Özet)

Elektrostatik (\vec{E})

1. Durgun yükler $\rho \rightarrow durgun$

$$2. \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ (Gauss yasası)}$$

$$3. \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{F} = Q \left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right]$$

$$q \rightarrow v = 0 \text{ ise}$$

$$\vec{F}_{elek.} = Q\vec{E}$$

$$q \rightarrow v = 0$$

$$4. \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

5. Elektrostatik kuvvetler

$$|\vec{F}_{elek.}| \gg |\vec{F}_{mag.}|$$

$$6. \vec{F}_{elek.} \text{ iş yapar } \vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Magnetostatik (\vec{B})

1. Hareketli yükler I veya $I \rightarrow sabit$

$$2. \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$3. \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}, \text{ (Ampere yasası)}$$

$$\vec{F} = Q \left[\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B}) \right]$$

$$q \rightarrow durdun \text{ ise } v = 0$$

$$\vec{F}_{mag.} = 0$$

$$q \rightarrow v = 0$$

$$4. I = 0, \vec{J} = 0, \vec{B} = 0$$

5. Magnetostatik kuvvetler

$$|\vec{F}_{elek.}| \gg |\vec{F}_{mag.}|$$

$$6. \vec{F}_{mag.} \text{ iş yapmaz}$$

Şayet yüklerin hareket hızı ışık hızı civarında olursa manyetik kuvvetlerin büyüklüğü elektrik kuvvetlerin büyüklüğüne yaklaşır.