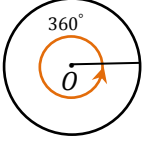


Trigonometrik Fonksiyonlar



1 derece bir çemberin merkez açısının tamamının ölçüsünün 360 da biridir. Açıları başka birimlerle de ölçmek mümkündür. Yarıçapı 1 birim olan çemberi (birim çemberi) göz önüne alalım. Bu çemberde her bir merkez açıya bir çember yayı uzunluğu karşılık

gelir. Birim çemberde, verilen bir açıya karşılık gelen yayın uzunluğuna o açının radyan olarak ölçüsü denir. Yarıçapı 1 birim olan çemberin çevresi 2π . $1 = 2\pi$ birim, merkez açısının ölçüsü 360° olduğundan

$$2\pi \text{ radyan} = 360^\circ$$

olduğuna göre

$$\frac{\text{Derece}}{360^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{2\pi} \text{ veya } \frac{\text{Derece}}{180^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{\pi}$$

veya

$$1 \text{ radyan} = \frac{360}{2\pi} \cong 57^\circ, 1 \text{ derece} = \frac{2\pi}{360} \cong 0,02 \text{ radyan}$$

yazabiliriz. Örneğin,

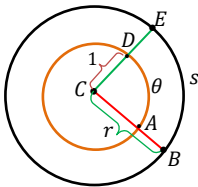
$$45^\circ \text{ nin radyan olarak karşılığı } \frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{\pi} \Rightarrow \text{Radyan} = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{6} \text{ radyanın derece olarak karşılığı } \frac{\text{Derece}}{180^\circ} = \frac{\pi/6}{\pi} \Rightarrow \text{Derece} = 180^\circ \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{\pi} = 30^\circ \text{ dir.}$$

Uyarı: Dereceden radyana geçilirken $\frac{\pi}{180^\circ}$ ile, radyandan dereceye geçilirken $\frac{180^\circ}{\pi}$ ile çarpılır.

En çok kullanılan derece ve bunlara karşılık gelen radyanlar tablo halinde aşağıda verilmiştir.

Derece	0	30	45	60	90	135	150	180	270	360
Radyan	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π



Aynı merkezli bir birim çemberle, bir r yarıçaplı çember çizelim.

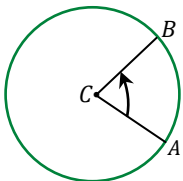
CAD ve CBE daire dilimleri benzer olduklarından

$$\frac{\theta}{|CA|} = \frac{s}{|CB|} \Rightarrow \frac{\theta}{1} = \frac{s}{r} \text{ dir. Buradan}$$

$$s = r\theta$$

bulunur.

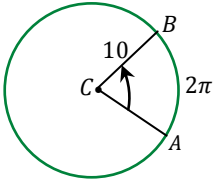
Örnek: Bir çember 8 eş parçaya bölünüyor. Bir yaya karşılık gelen merkez açının ölçüsünü radyan cinsinden hesaplayınız.



Çözüm: Merkez açının tamamının ölçüsü 2π radyan olduğundan bir parçaya

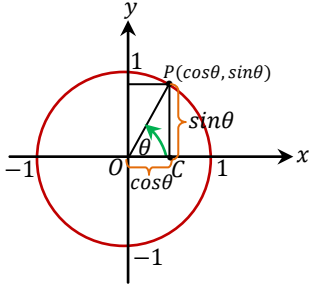
karşılık gelen merkez açının ölçüsü $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ radyandır.

Örnek: Yarıçapı 10 birim olan bir çemberde bir merkez açığa karşılık gelen yayın uzunluğu 2π birim



olduğuna göre, merkez açının ölçüsü kaç radyandır?

Çözüm: $s = r\theta \Rightarrow 2\pi = 10\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{5}$ radyan olur.



Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çember çizelim. Bir kenarı $[OC]$ olan ve ölçüsü θ olan açığı çizelim. Bu durumda çember üzerinde bir P noktası elde edilir. P noktasının apsisi $\cos\theta$, ordinatı $\sin\theta$ olarak tanımlanır. Böylece her bir $\theta \in \mathbb{R}$ sayısına bir $\cos\theta$ ve bir $\sin\theta$ sayısı karşılık gelir. Şekilden de görüldüğü gibi

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1, \quad -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

dır.

Şimdi, $O(0,0)$ merkezli birim çemberle r yarıçaplı bir çember çizelim. θ ölçülü açının bir kenarının çemberleri kestiği noktalar K ve L olsun.

$$\sin\theta = |AK|, \quad \cos\theta = |OA|$$

dır. $\triangle KOA$ ve $\triangle LOB$ üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|AK|}{|OK|} = \frac{|BL|}{|OL|} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{1} = \frac{|BL|}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{|BL|}{r}$$

bulunur. Benzer şekilde

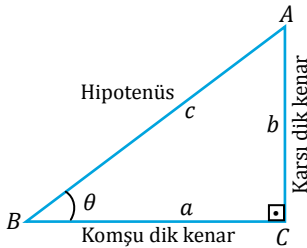
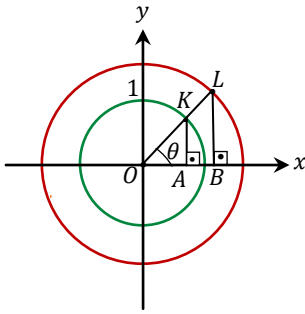
$$\cos\theta = \frac{|OB|}{r}$$

bulunur. Buna göre bir dik üçgende

$$\sin\theta = \frac{\text{karşı dik kenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{komşu dik kenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

olur.



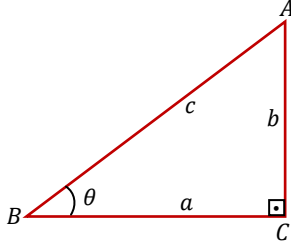
Sinüs ve kosinüsten başka en çok kullanılan diğer oranlar; tanjant, kotanjant, sekant ve kosekanttır.

Bunlar aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

Yukarıdaki ifadelerin tanımlı olması için paydalarının sıfırdan farklı olması gerekir.

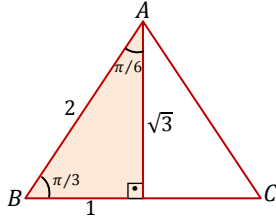


Yandaki dik üçgene göre,

$$\cos\theta = \frac{a}{c}, \quad \sin\theta = \frac{b}{c}, \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{c}{a}, \quad \csc\theta = \frac{c}{b}, \quad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

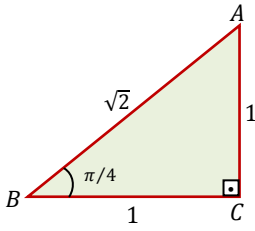
olur.



Herhangi bir θ verildiğinde, ona karşılık gelen trigonometrik değerleri hesaplamak kolay olmayabilir. Bunlar için trigonometri cetvelleri denilen bazı cetveller verilmiştir. Fakat bazı özel θ değerleri için bu ifadeleri hesaplamak çok kolaydır. Bir kenarının uzunluğu 2 birim olan bir eşkenar üçgen ile bunun yüksekliğini çizelim.

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

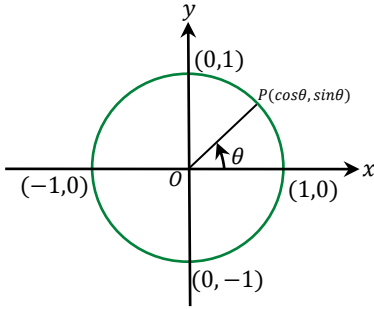
olur.



Şimdi bir kenarının uzunluğu 1 birim olan ikizkenar dik üçgeni çizelim. Dar açılarının ölçüleri $\pi/4$ radyandır. Buna göre

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

olur.



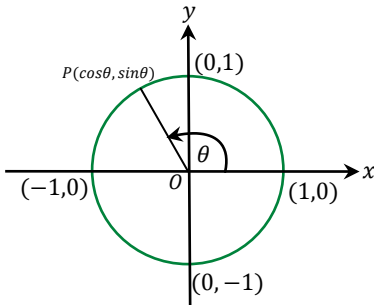
Şimdi birim çemberi gözönüne alarak trigonometrik oranların değerlerini ve işaretlerini inceleyelim.

I. Bölgede bir noktanın apsis ve ordinatları pozitif olduğundan, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

için

$$\cos\theta > 0, \quad \sin\theta > 0$$

dır.

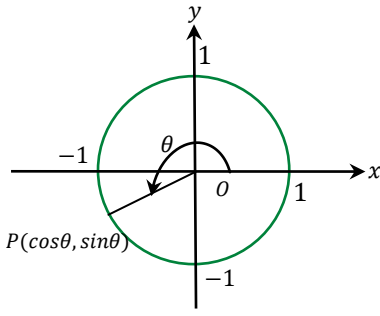


II. Bölgede bir noktanın apsisleri negatif ve ordinatları pozitif olduğundan

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ için

$$\cos\theta < 0, \quad \sin\theta > 0$$

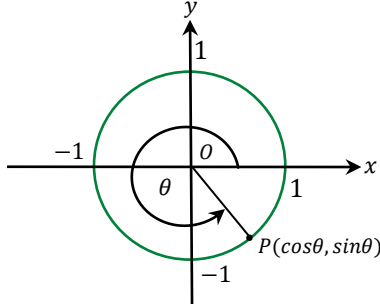
dır.



III. Bölgede bir noktanın apsisi ve ordinatları negatif olduğundan,
 $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ için

$$\cos\theta < 0, \quad \sin\theta < 0$$

dır.



IV. Bölgede bir noktanın apsisi pozitif, ordinatları negatif olduğundan, $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ için

$$\cos\theta > 0, \quad \sin\theta < 0$$

dır.

Örnek: $\cos \frac{2\pi}{3}$ ve $\sin \frac{2\pi}{3}$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm: $\frac{2\pi}{3}$ ölçülü, açığa karşılık gelen nokta II. bölgededir. P

noktasının koordinatları

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olacağından}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

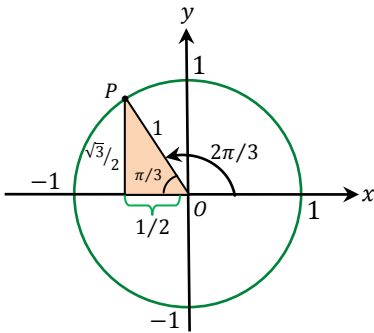
bulunur.

Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \text{ ve } \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

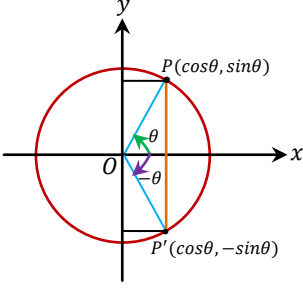
dır. Bu yol izlenerek birçok özel açının trigonometrik oranları

hesaplanabilir. Bu özel değerlerin trigonometrik oranlarını bir tablo halinde verelim.



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$
0	0	1	0	tanımsız
$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	1	0	tanımsız	0
$2\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1
$5\pi/6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
π	0	-1	0	tanımsız

Trigonometrik oranlar arasındaki temel bağıntılar aşağıda verilmiştir.



Birim çemberden

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

olduğu açıktır. $(x, -y)$ noktası (x, y) noktasının x -eksenine göre simetriği olduğundan

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \text{ ve } \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

olur.

İki yayın toplamlarının trigonometrik oranları

$$\cos(\theta + \beta) = \cos\theta \cos\beta - \sin\theta \sin\beta$$

$$\sin(\theta + \beta) = \sin\theta \cos\beta + \sin\beta \cos\theta$$

$$\tan(\theta + \beta) = \frac{\tan\theta + \tan\beta}{1 - \tan\theta \tan\beta}$$

bağıntıları yardımıyla hesaplanır. Burada β yerine $-\beta$ konur ve

$\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ olduğu göz önüne alınırsa, iki yayın

farkının trigonometrik oranları

$$\cos(\theta - \beta) = \cos\theta \cos\beta + \sin\theta \sin\beta$$

$$\sin(\theta - \beta) = \sin\theta \cos\beta - \sin\beta \cos\theta$$

$$\tan(\theta - \beta) = \frac{\tan\theta - \tan\beta}{1 + \tan\theta \tan\beta}$$

bağıntılarıyla hesaplanabilir.

Toplam formüllerinde $\beta = \theta$ konursa, iki kat formülleri denilen aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta, \\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

Yukarıdaki yayların toplam ve farkı için verilen bağıntılar taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

bağıntıları elde edilir.

Yukarıdaki birinci ve üçüncü bağıntılarda $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$ yazılırsa

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

eşitlikleri elde edilir.

Herbir x yay uzunluğuna bir $\sin x$ ve bir $\cos x$ karşılık geldiğinden

$$f(x) = \sin x \text{ ve } f(x) = \cos x$$

fonksiyonlarına ve bunlar yardımıyla tanımlanan

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x},$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

fonksiyonlarına **trigonometrik fonksiyonlar** denir.

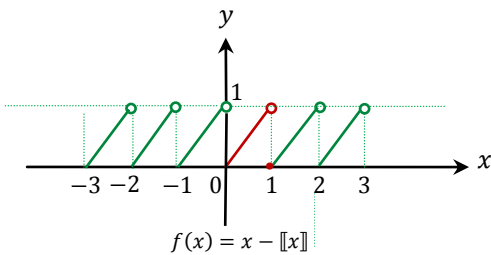
Tanım: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x + T) = f(x)$ olacak şekilde bir pozitif T sayısı varsa f fonksiyonuna bir **periyodik fonksiyon**, T sayısına da f nin **periyodu** denir. T sayılarının en küçüğü varsa bu en küçük periyoda fonksiyonun **esas periyodu** veya kısaca **periyodu** denir.

Örnek: $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$ fonksiyonu periyodik midir? Periyodik ise esas periyodunu bulunuz.

Çözüm: m bir pozitif tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned} f(x + m) &= x + m - \llbracket x + m \rrbracket = x + m - (\llbracket x \rrbracket + m) \\ &= x + m - \llbracket x \rrbracket - m = x - \llbracket x \rrbracket = f(x) \end{aligned}$$

olur. Buna göre her pozitif tamsayı birer periyottur. Bunların en küçüğü 1 olduğundan, f nin esas



periyodu 1 dir. Buna göre $f(x) = x - \llbracket x \rrbracket$ in grafiğini 1 birim uzunluğundaki bir aralıkta çizmek yeterlidir. Zira diğer parçalar bunun arka arkaya kopyalanmasından ibarettir. Verilen fonksiyonun $[0, 1]$ aralığındaki grafiğini çizelim. $0 \leq x < 1$ için $\llbracket x \rrbracket = 0$ olduğundan $f(x) = x$ olur. $x = 1$ için $f(x) = 0$ dir. Bu durumdaki grafik yandaki gibidir.

Örnek: $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyodik olduğunu gösterip, esas periyodunu bulunuz. Bundan yararlanarak $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

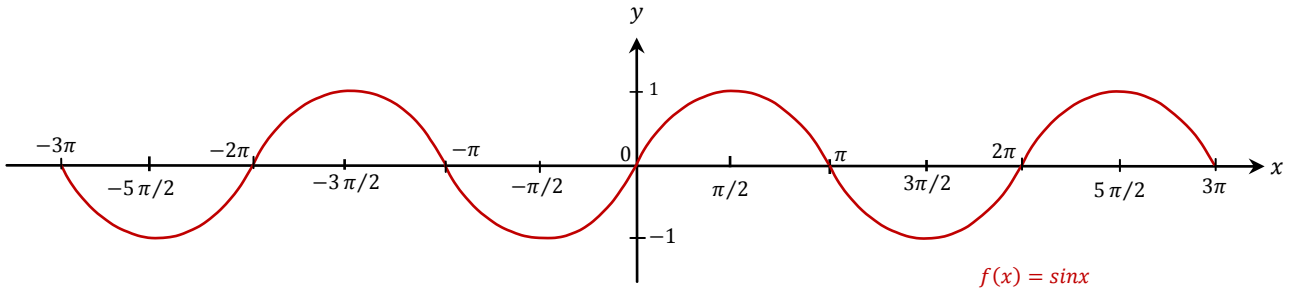
Çözüm: $f(x + T) = f(x) \Rightarrow \sin(x + T) = \sin x \Rightarrow \sin x \cos T + \cos x \sin T = \sin x \Rightarrow \cos T = 1$ ve $\sin T = 0$ olmalıdır. Buradan $T = k \cdot 2\pi$ elde edilir.

Buna göre 2π nin tüm katları birer periyottur. Bunların en küçüğü 2π olduğundan $f(x) = \sin x$

in esas periyodu 2π dir. O halde $[0, 2\pi]$ aralığında çizim yapmak yeterlidir. Diğer parçalar bu parçaların tekrarından ibarettir.

$[0, 2\pi]$ aralığındaki özel değerler için bulunan noktalar birleştirilerek eğri çizilir.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

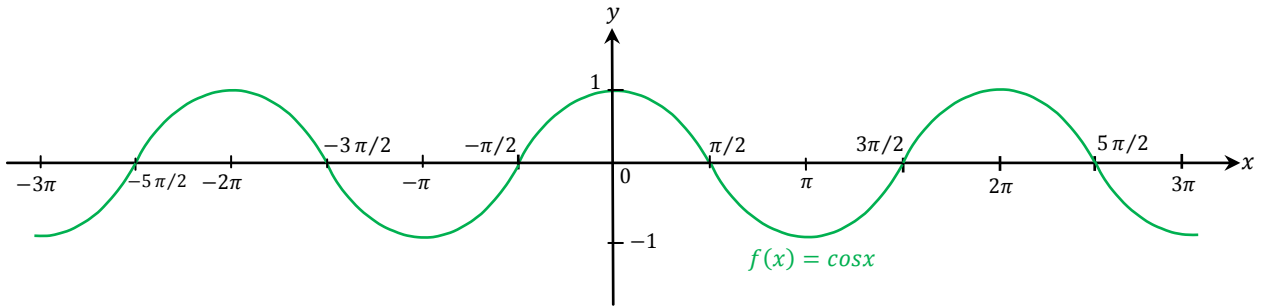


$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun da esas periyodunun 2π olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

olduğundan, $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun grafiğini çizmek için $\sin x$ eğrisinin her bir noktasını $\frac{\pi}{2}$

kadar sola kaydırmak yeter. Böylece aşağıdaki grafik elde edilir.



Teorem: m bir pozitif tamsayı a ve b , $a \neq 0$ olmak üzere reel sayılar olsun. Bu durumda

1. $\sin x$ ve $\cos x$ in periyodu 2π ,
2. $\tan x$ ve $\cot x$ in periyodu π ,
3. $\sin(ax + b)$ ve $\cos(ax + b)$ nin periyodu $\frac{2\pi}{|a|}$,
4. $\tan(ax + b)$ ve $\cot(ax + b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$,
5. $\sin^{2m}(ax + b)$ ve $\cos^{2m}(ax + b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$,
6. $\sin^{2m-1}(ax + b)$ ve $\cos^{2m-1}(ax + b)$ nin periyodu $\frac{2\pi}{|a|}$,

7. $\tan^m(ax + b)$ ve $\cot^m(ax + b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$

dir.

Örnek: $f(x) = \sin^4x + \cos^4x$ fonksiyonunun esas periyodunu bulunuz.

Çözüm: \sin^4x ve \cos^4x ifadelerinin esas periyodu π dir. Buna göre f nin periyodu π dir. Fakat bunun esas periyot olması gerekmez. Gerçekten

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos^4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(\sin x \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + \cos x \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1\right)^4 + \left(\cos x \overbrace{\cos \frac{\pi}{2}}^0 - \sin x \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1\right)^4 \\ &= \sin^4x + \cos^4x = f(x) \end{aligned}$$

olduğundan $\frac{\pi}{2}$ de bir periyottur.

Örnek: $f(x) = \sin^2x$ ve $g(x) = \cos^2x$ fonksiyonlarının periyotlarını bulunuz.

$f(x) + g(x) = \sin^2x + \cos^2x$ periyodik midir? Bu fonksiyonun esas periyodu var mıdır?

Çözüm: $f(x) = \sin^2x$ ve $g(x) = \cos^2x$ fonksiyonlarının periyodu π dir.

$f(x) + g(x) = \sin^2x + \cos^2x = 1$ dir. Bu fonksiyon periyodiktir.

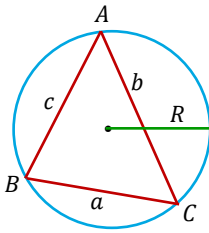
Çünkü her $T > 0$ için $f(x + T) + g(x + T) = \sin^2(x + T) + \cos^2(x + T) = 1 = f(x) + g(x)$ dir.

Her pozitif T sayısı bir periyottur. Pozitif reel sayıların en küçüğü mevcut olmadığından esas periyot yoktur.

Yukarıdaki iki örnekten şu sonuç çıkartılabilir:

Sonuç: f ve g nin esas periyodu T ise $f \mp g$ nin de bir periyodu T dir, fakat bu T esas periyot olmayabilir. Hatta $f \mp g$ nin esas periyodu olmayabilir.

Genel matematik derslerinde kullanılan iki önemli teoremi ispatsız olarak ifade edelim.



Teorem:

Sinüs Teoremi

ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R olsun. Bu durumda

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

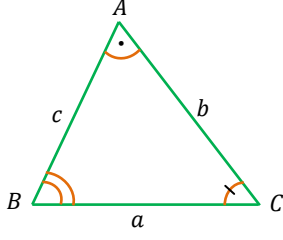
dir.

Örnek: Bir ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 75^\circ$, $m(\hat{B}) = 60^\circ$, $|AB| = c = 8$ br olduğuna göre $|AC|$ kenar uzunluğunu bulunuz.

Çözüm: $m(\hat{C}) = 180^\circ - (m(\hat{A}) + m(\hat{B})) = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$ olur.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow b = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6}$$

birim olur.



Teorem:

Kosinüs Teoremi

Bir ABC üçgeninde, $|BC| = a$, $|AC| = b$, ve $|AB| = c$ olsun.

Üçgenin köşe açılarının ölçüleri A, B, C ise

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

dir.

Örnek: Bir ABC üçgeninde $a = 3$ birim, $b = 5$ birim ve $m(\hat{C}) = 120^\circ$ ise $|AB| = c$ kaç birimdir?

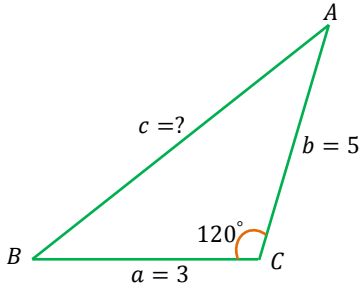
Çözüm: Kosinüs teoreminden

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 9 + 25 + 15 = 49 \end{aligned}$$

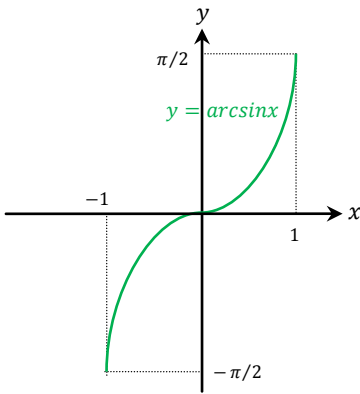
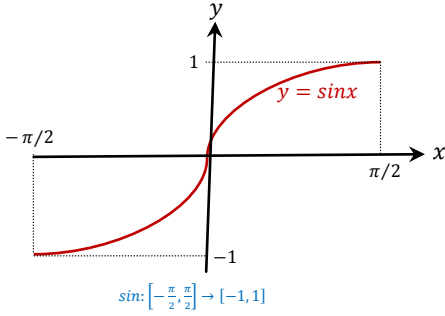
olur. Buna göre

$$c = 7$$

birimdir.



TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR



$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
fonksiyonunun grafiği

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığına kısıtlanır, değer kümesi olarak $[-1, 1]$ aralığı alınırsa bu fonksiyon birebir ve örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir. Bu eğri $y = \sin x$ eğrisinin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığına karşılık gelen parçasından ibarettir. Bu fonksiyonun tersine arksinüs fonksiyonu denir ve kısaca \arcsin veya \sin^{-1} ile gösterilir.

Buna göre \arcsin fonksiyonu, tanım kümesi $[-1, 1]$ ve değer kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olan bir fonksiyondur. Ters fonksiyonun grafiği, esas fonksiyonunun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından $\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonunun grafiği yandaki gibi olur. Yukarıdaki açıklamalara göre

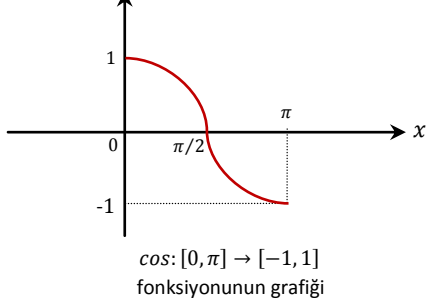
$$u = \arcsin v \Leftrightarrow \sin u = v \text{ ve } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ dir.}$$

Örnek: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\arcsin(-\frac{1}{2})$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = u \Leftrightarrow 1 = \sin u = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

ve

$$\arcsin(-\frac{1}{2}) = t \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \sin t \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6} \text{ dir.}$$



Benzer şekilde, kosinüs fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığında kısıtlanması olan

$$\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır. Bu ters fonksiyona arkkosinüs fonksiyonu denir. $\arccos x$ in anlamı kosinüsü x olan yay demektir. Buna göre,

$$u = \arccos v \Leftrightarrow \cos u = v \text{ ve } u \in [0, \pi]$$

dir.

Örnek: $\arccos 1$ ve $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm: $\arccos 1 = u \Rightarrow 1 = \cos u \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \arccos 1 = 0$

$$\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = t \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos t \Rightarrow t = \frac{5\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$$

bulunur.

Aynı şekilde tanjant fonksiyonunun $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığına kısıtlanması olan

$$\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$$

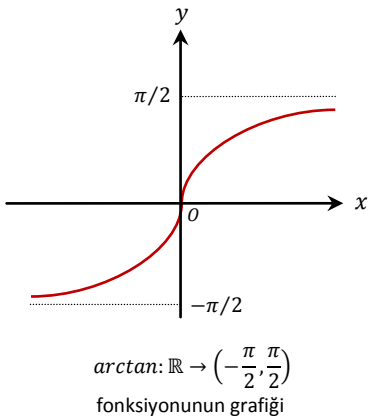
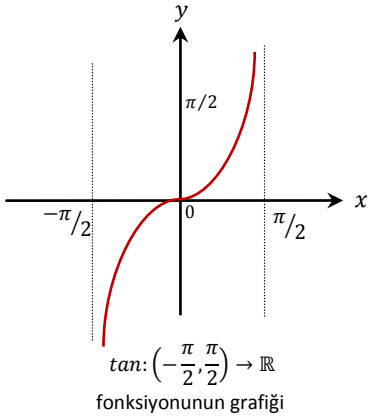
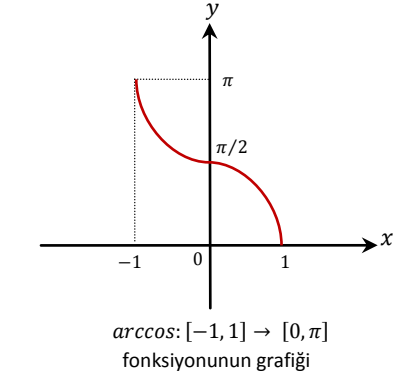
fonksiyonunun

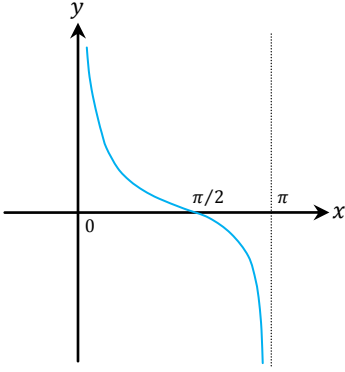
$$\tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

şeklinde bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arktanjan (kısaca arctan yazılır) fonksiyonu adı verilir. $\arctan x$ in anlamı tanjantı x olan yayın uzunluğu demektir. Tanjant ve Arktanjan fonksiyonları birbirlerinin tersi olduklarından bunların grafikleri yandaki gibi olacaktır. Yukarıdaki tanıma göre

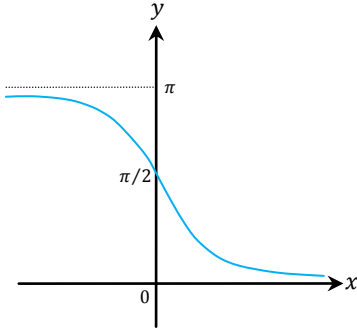
$$u = \arctan v \Leftrightarrow \tan u = v \text{ ve } u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

dir.





$\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$
fonksiyonunun grafiği



$\text{arccot}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$
fonksiyonunun grafiği

Örnek: $\arctan(-\sqrt{3})$ ve $\arctan 1$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm: $\arctan(-\sqrt{3}) = u \Leftrightarrow -\sqrt{3} = \tan u \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \text{ olur.}$$

$$\arctan 1 = t \Leftrightarrow 1 = \tan t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

bulunur.

Kotanjant fonksiyonu da $(0, \pi)$ aralığında birebir ve örten olduğundan bu fonksiyonun da tersi vardır. Bu ters fonksiyona Arkkotanjant(Arccot) fonksiyonu denir. Yukarıdaki tanıma göre

$$u = \text{arccot} v \Leftrightarrow v = \cot u \text{ ve } u \in (0, \pi)$$

dir.

Kotanjant ve arkkotanjant fonksiyonlarının grafikleri yandaki gibidir.

Örnek: $\text{arccot}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ve $\text{arccot}\sqrt{3}$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = u \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot u \Leftrightarrow u = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{arccot}\sqrt{3} = v \Leftrightarrow \cot v = \sqrt{3} \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{arctan}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$$

olur.