

7.1 ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONLARI

Giriş: Üstel ve logaritmik fonksiyonlar, matematik, işletme, ekonomi ve mühendislik alanlarında çok sayıda kullanım alanları bulunan fonksiyonlardır. Nüfus artışı, bankaya yatırılan paranın artışı, bir ortamdaki virüs sayısının artışı yada azalışı üstel ve logaritmik fonksiyonlar yardımı ile modellenebilmektedir.

Tanım : $a \neq 1$ herhangi bir pozitif reel sayı ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan fonksiyona bir üstel fonksiyon ve a sayısına da üstel fonksiyonun tabanı adı verilir.

$$f(x) = 2^x, \quad h(x) = 5^x, \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad k(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x$$

fonksiyonları birer üstel fonksiyondur.

7.1.1 Üslü Sayıların Özellikleri

Üstel fonksiyon, üslü ifadelerde gördüğümüz bütün özellikleri \mathbb{R} üzerinde sağlar. $a, b \in \mathbb{R}^+$, $a, b \neq 1$ ve $m, n \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler vardır:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4. $\frac{a^n}{a^m} = (a)^{n-m}$, ($a \neq 0$)

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

6. $a^0 = 1$

7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

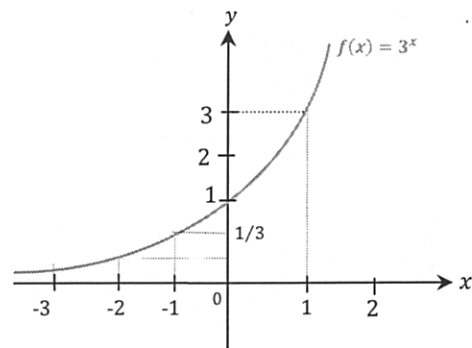
8. $a \in \mathbb{R}^+$ ve $a \neq 1$ olmak üzere $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$,

9. $a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $x \neq 0$ olmak üzere, $a^x = b^x \Leftrightarrow a = b$ dir.

7.1.2 Üstel Fonksiyonun Grafiği

$y = f(x) = 3^x$ fonksiyonu ele alınırsa x yerine aşağıdaki değerler konduğunda fonksiyonun alacağı değerler

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	$1/27$	$1/9$	$1/3$	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$	$3^3 = 27$



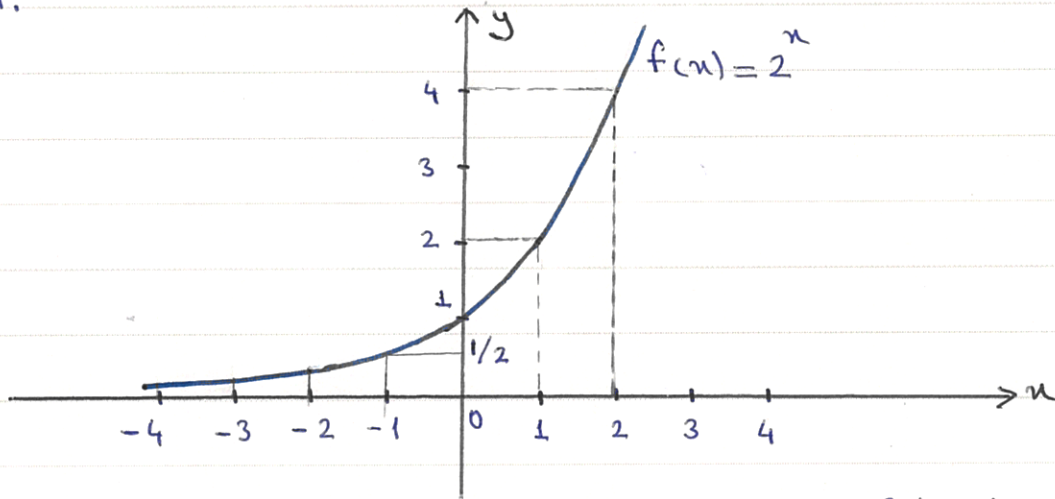
Örnek: $f(x) = 2^x$ fonksiyonu ele alınırsa x yerine aşağıdaki değerler konduğunda fonksiyonun alacağı değerler aşağıdaki tabloda verilmektedir.

x	$-\infty \dots -3$	-2	-1	0	1	2	$3 \dots \infty$
$f(x)$	$0 \dots 2^{-3} = 1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	$8 \dots \infty$

Buna göre;

$(-3, 1/8), (-2, 1/4), (-1, 1/2), (0, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 8)$

ikilileri düzlemde belirtilerek $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



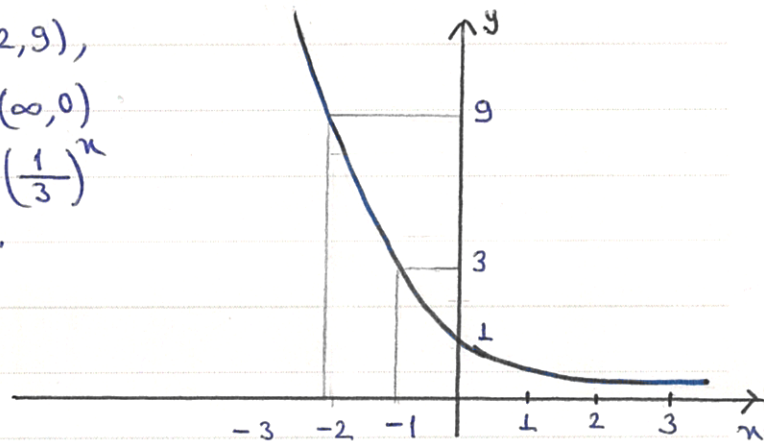
Yukarıda verilen örneklerden görüldüğü gibi taban 1'den büyük ise fonksiyon sağa doğru artandır.

Örnek:

$y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^{-x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

x	$-\infty \dots -3$	-2	-1	0	1	2	$3 \dots \infty$
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\infty \dots \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$	9	3	$\left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27} \dots 0$

Buna göre; $(-\infty, \infty), \dots, (-3, 27), (-2, 9), (-1, 3), (0, 1), (1, 1/3), (2, 1/9), \dots, (\infty, 0)$ ikilileri düzlemde belirtilerek $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.

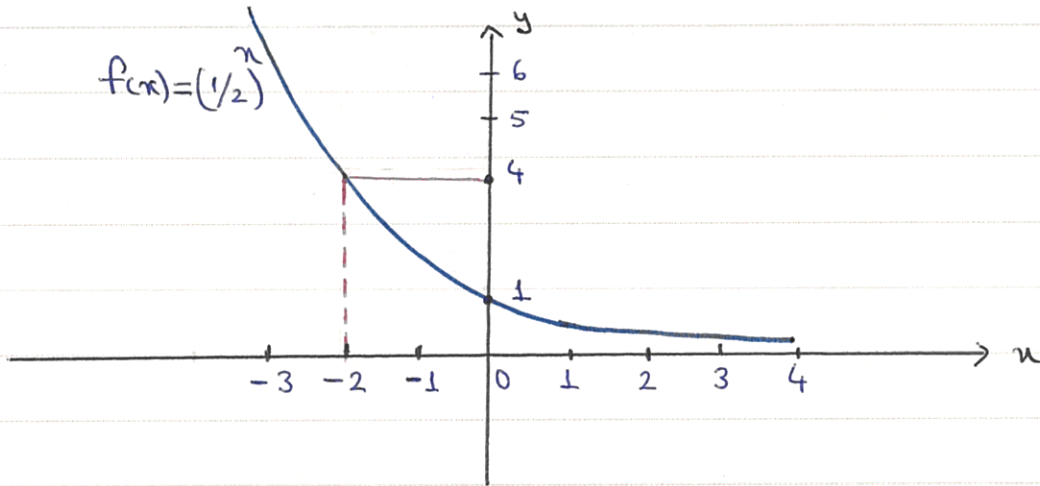


Şekil: Üstel fonksiyonda tabanın 1'den küçük olması hali

Örnek: $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

x	$-\infty \dots -3 -2 -1 0 1 2 3 \dots \infty$
$f(x)$	$\infty \dots 8 4 2 1 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \dots 0$

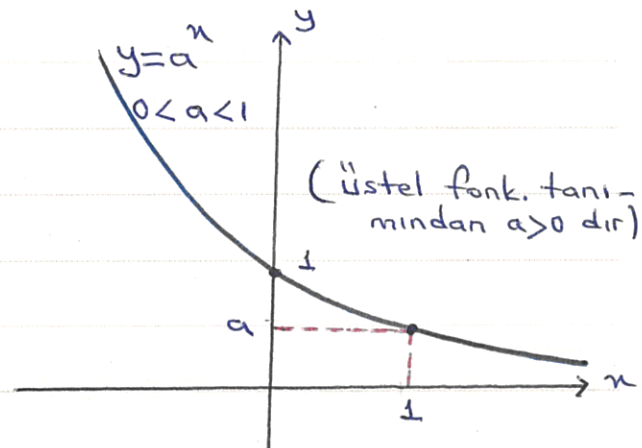
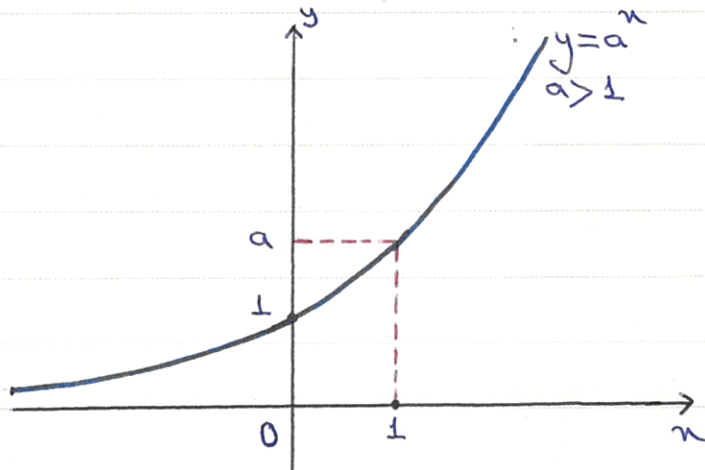
Buna göre $(-\infty, \infty), \dots, (-3, 8), (-2, 4), (-1, 2), (0, 1), (1, \frac{1}{2}), (2, \frac{1}{4}), (3, \frac{1}{8}), \dots, (\infty, 0)$ ikilileri düzlemde belirtilerek $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ fonksiyonunun grafiği elde edilir.



Şekil: Üstel fonksiyonda tabanın 1'den ($0 < a < 1$) küçük olması durumu

Üstel fonksiyonun tabanının 0 ile 1 arasında bulunduğundan fonksiyon sağa doğru azalır.

a 'nın 1'den büyük ve 1'den küçük olmasına göre $y = a^x$ fonksiyonunun grafiği aşağıdaki gibidir:



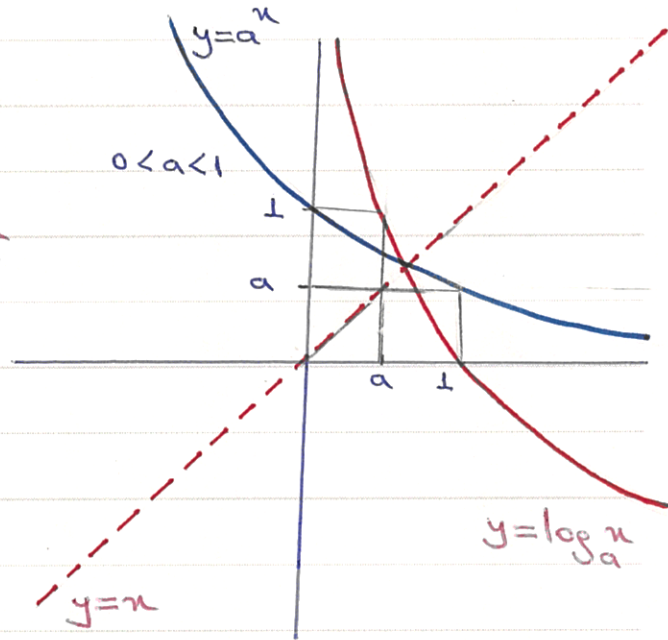
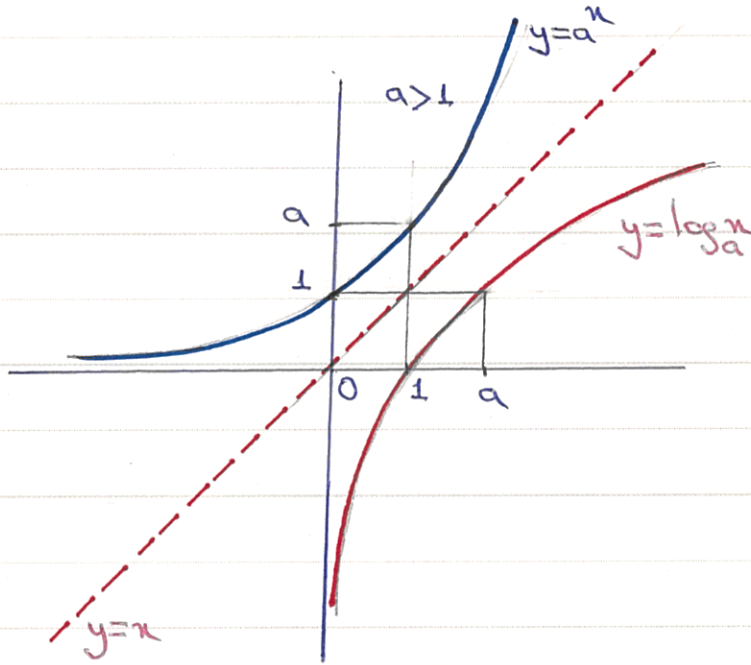
Tanım: $y = a^x$ in grafiğinde de anlaşılabileceği gibi $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu 1-1 ve ör-
tendir. Dolayısıyla bu fonksiyonun $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ şeklinde
bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona logaritma fonksiyo-
nu adı verilir. Buna göre, logaritma fonksiyonu,

$\log_a: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ veya $y = \log_a x$
olarak gösterilir ve "a tabanına göre logaritma x" diye
okunur. Buna göre,

$$x > 0 \text{ için } y = \log_a x \iff x = a^y$$

dir.

$y = \log_a x$ in grafiği, $y = a^x$ in grafiğinin $y = x$ doğrusuna
göre simetri olacağından grafiği aşağıdaki gibidir:



Örnek: Aşağıdaki üslü ifadeleri logaritma biçiminde yazalım

- (i) $2^4 = 16 \iff \log_2 16 = 4$,
- (ii) $3^4 = 81 \iff \log_3 81 = 4$,
- (iii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16 \iff \log_{1/2} 16 = -4$,
- (iv) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \iff \log_{1/3} \frac{1}{81} = 4$ dür.

Örnek: 32 sayısının 2 tabanına göre logaritmasını bulunuz.

çözüm: 32 sayısı taban olan 2 nin kaçinci kuvveti olduğunu bulmalıyız.

$$\log_2 32 = y \Leftrightarrow 2^y = 32 = 2^5 \Rightarrow y = 5 \text{ dir. Buna göre,}$$

$$\log_2 32 = 5 \text{ dir,}$$

$a \neq 1$ pozitif bir reel sayı olmak üzere logaritmanın temel özellikleri

(i) Bir çarpımın logaritması, çarpanların logaritmasının toplamına eşittir. Yani, $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ dir. Gerçekten de $x, y \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\log_a x = u, \log_a y = v \text{ diyelim. Buradan; } x = a^u, y = a^v \text{ elde edilir.}$$

$$x \cdot y = a^u \cdot a^v = a^{u+v} \Rightarrow \log_a (x \cdot y) = u + v \Rightarrow \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

elde edilir.

(ii) Bir bölünün logaritması, payın logaritması ile paydanın logaritmasının farkına eşittir. Yani,

$$\log_a x/y = \log_a x - \log_a y \text{ dir. Gerçekten de,}$$

$$\log_a x = u, \log_a y = v \text{ dersek } x = a^u, y = a^v \text{ olur.}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \Rightarrow \log_a x/y = u - v \Rightarrow \log_a x/y = \log_a x - \log_a y$$

elde edilir.

(iii) Bir kuvvetin logaritması, sayının logaritması ile kuvvetin çarpımına eşittir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ dir. Gerçekten,

$$\log_a x^n = \log_a (\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n\text{-tane}}) = \log_a x + \dots + \log_a x = n \cdot \log_a x \text{ dir,}$$

Özel olarak $n = -1$ ve $n = \frac{1}{r}$ (r , pozitif tamsayı) için, sırasıyla

$$\log_a x^{-1} = \log_a 1/x = -\log_a x \text{ ve } \log_a x^{1/r} = \log_a \sqrt[r]{x} = \frac{1}{r} \log_a x \text{ elde edilir.}$$

(iv) $\log_a a = 1$

(v) $\log_a 1 = 0$

(vi) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

(vii) $0 < a < 1$ için $a^\infty = 0$ olduğundan $\log_a 0 = \infty$,

$1 < a$ için $a^{-\infty} = 0$ olduğundan $\log_a 0 = -\infty$ dir,

(viii) $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$

Örnek: $\log_5 15 = \log_5 (5 \cdot 3) = \log_5 5 + \log_5 3 = 1 + \log_5 3,$

$\log_2 21 = \log_2 (3 \cdot 7) = \log_2 3 + \log_2 7.$

Örnek:

$\log_{10} 50 + \log_{10} 2 = \log_{10} (50 \cdot 2) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2.$

Pratikte en çok kullanılan logaritma, doğal (tabii) logaritma denilen ve e tabanına göre yazılan logaritmadır. Burada e sayısı irrasyonel bir sayı olup yaklaşık değeri $e = 2,71828...$ dir.

$\log_e x$ yerine genel de $\ln x$ yazılır.

$\log_{10} x = \log x$ kullanılır. O halde,

$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ dir.

Uygulamalar

2000 ve 2010 yıllarında yapılan genel nüfus sayımlarına göre Türkiye'nin nüfusu aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

Sayım	Nüfus
21.10.2000	57 000 000
22.10.2010	68 580 000

Bu verilere göre Türkiye'nin yıllık nüfus artış hızı yaklaşık %1,85'tir. Aynı artış hızının süreceği kabul edilerek Türkiye'nin 2010'den sonra gelen bir t yılındaki P nüfusu;

$$N(t) = k \cdot e^{0,0185 \cdot t}$$

$$N(0) = k \cdot e^{0,0185 \cdot 0} = 57.000.000$$

$$k = 57.000.000$$

$$N(t) = 57.000.000 \cdot e^{0,0185 \cdot t}$$

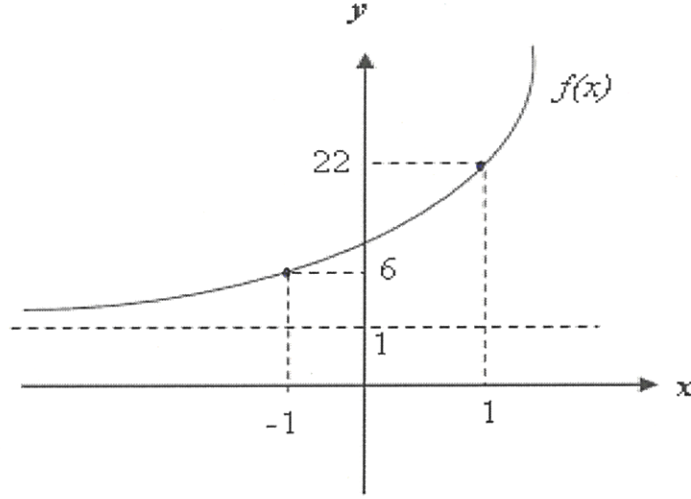
$$N(t) = 57000000 \cdot e^{0,0185 \cdot t} \quad [t = 0 \text{ (2000 yılı için) biçiminde modellenenebilir.}]$$

$t = 20$ ise, (2020 yılında)

$$N(t) = 57.000.000 \cdot e^{0,0185 \cdot 20} \cong 82.520.000$$

Uygulama Soruları

1) $f(x) = a \cdot 3^{x+1} + b$ üstel fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir. Bu grafiğe göre $f(0)$ kaçtır?



Çözüm:

$$x = -1 \text{ için } f(x) = 6 \Rightarrow 6 = a \cdot 3^{-1+1} + b \Rightarrow a \cdot 3^0 + b = 6 \Rightarrow a + b = 6$$

$$x = 1 \text{ için } f(x) = 22 \Rightarrow 22 = a \cdot 3^{1+1} + b \Rightarrow a \cdot 3^2 + b = 22 \Rightarrow 9a + b = 22$$

Bu durumda;

$$9a + b = 22$$

$$-a - b = -6$$

Her iki taraf, taraf tarafa toplanırsa;

$$8a = 16 \Rightarrow a = 2$$

ve buradan $b = 4$ bulunur.

$$f(x) = 2 \cdot 3^{x+1} + 4$$

$$f(0) = 2 \cdot 3^{0+1} + 4 = 10$$

olarak bulunur.

2) $2^{x-1} = 6$ ise x kaçtır?

Çözüm:

$$x - 1 = \log_2 6 \Rightarrow x = \log_2 6 + 1 \Rightarrow x = 63$$

3) $\ln(\log x) = 0$ ise $x = ?$

Çözüm:

\ln tabanı e olan logaritmadır.

$$\log x = e^0 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10$$

4) $y = 5 - x^2 - \log_5(x + 7)$ fonksiyonunun tanım kümesi nedir?

Çözüm:

Logaritma fonksiyonu pozitif sayılar için tanımlıdır. Dolayısıyla, $x + 7 > 0$ yani $x > -7$ olmalıdır.

5) $y = \log_2 x$ ise $y = 5$ için x kaçtır?

Çözüm:

$$5 = \log_2 x \rightarrow x = 2^5 = 32$$