

4.7 Ters Türevler

Tanım: Bir I aralığındaki $\forall x$ için $F'(x) = f(x)$ ise F fonksiyonuna, f fonksiyonunun I aralığındaki ters türevi(anti türevi) denir. Kısacası, türevi alındığında $f(x)$ i veren esas fonksiyona $f(x)$ in ters türevi denir.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların her biri için bir ters türev bulunuz.

a) $f(x) = 2x$ **b)** $g(x) = \cos x$ **c)** $h(x) = 2x + \cos x$

Çözüm: Hangi fonksiyonunun verilen fonksiyona eşit bir türevi vardır?

a) $F(x) = x^2$ **b)** $G(x) = \sin x$ **c)** $H(x) = x^2 + \sin x$

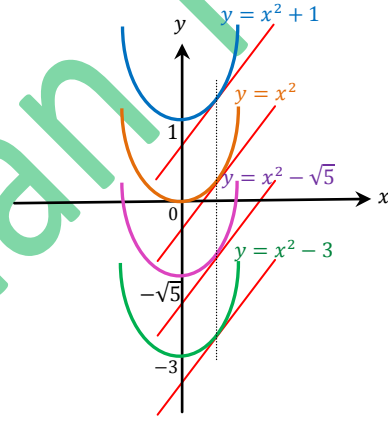
Örnek: $f(x) = 2x$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun bazı ters türevlerini bulunuz.

Çözüm: $(x^2 + 1)' = (x^2 - 3)' = (x^2 - \sqrt{5})' = 2x$

olacağından $f(x) = 2x$ fonksiyonunun ters türevleri

$$F(x) = x^2 + 1, G(x) = x^2 - 3, H(x) = x^2 - \sqrt{5}$$

fonksiyonlarıdır. Bu ters türevlerin ortak özellikleri, aynı apsisi noktalarındaki teğetlerinin paralel olmalarıdır.



Teorem: Eğer F fonksiyonu bir I aralığı üzerinde

f fonksiyonunun bir ters türevi ise, f fonksiyonunun I aralığı üzerindeki en genel ters türevi, c keyfi bir sabit olmak üzere

$$F(x) + c$$

dir. Bir başka ifadeyle, iki ters türev arasındaki fark sabittir.

Örnek: $f(x) = 3x^2$ nin $F(1) = -1$ eşitliğini sağlayan ters türevini bulunuz.

Çözüm: x^3 ün türevi $3x^2$ olduğu için;

$$F(x) = x^3 + c$$

genel ters türevi, $f(x)$ in bütün ters türevlerini verir. $F(1) = 1 + c$ ve $F(1) = -1$ olduğundan

$$1 + c = -1 \Rightarrow c = -2. \text{ Buna göre, } F(x) = x^3 - 2$$

$F(1) = -1$ eşitliğini sağlayan ters türevdir.

Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların her birinin genel ters türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = x^5$ **b)** $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ **c)** $h(x) = \sin 2x$ **d)** $i(x) = \cos \frac{x}{2}$

Tablo: Ters türev formülleri, k sıfırdan farklı bir sabit			
Fonksiyon	Genel Ters Türev	Fonksiyon	Genel Ters Türev
1. x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, n \neq -1$	5. $\csc^2 kx$	$-\frac{1}{k}\cot kx + c$
2. $\sin kx$	$-\frac{1}{k}\cos kx + c$	6. $\sec kx$	$\frac{1}{k}\tan kx + c$
3. $\cos kx$	$\frac{1}{k}\sin kx + c$	7. $\csc kx$	$-\frac{1}{k}\cot kx + c$
4. $\sec^2 kx$	$\frac{1}{k}\tan kx + c$		

Çözüm: Her fonksiyon için yukarıdaki tablodaki formüllerden birini kullanabiliriz.

a) $F(x) = \frac{x^6}{6} + c$, Formül 1, $n = 5$ iken

b) $g(x) = x^{-1/2}$, o halde

$$G(x) = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c, \text{ Formül 1, } n = -1/2 \text{ iken}$$

c) $H(x) = \frac{-\cos 2x}{2} + c$, Formül 2, $k = 2$ iken

d) $I(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) + c$, Formül 3, $k = 1/2$ iken

Belirsiz İntegraller

Tanım: f nin bütün ters türevlerinin kümesine, f nin x e göre belirsiz integrali denir ve

$$\int f(x)dx$$

ile gösterilir. Buradaki \int sembolüne integral işareti denir. $\int f(x)dx$ ifadesi, $f(x)$ ifadesinin belirsiz integrali olarak adlandırılır. Ayrıca $f(x)$ ifadesine integrat, x e ise integral değişkeni denir.

Bu tanıma göre f fonksiyonunun bir ters türevi F ise,

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

olacaktır. Buna göre,

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

olur. c sayısı integrasyon sabiti olarak adlandırılır.

Örnek: $\int 3x^2 dx$ ve $\int \cos x dx$ integrallerini hesaplayınız.

Çözüm: $(x^3)' = 3x^2$ olduğundan

$$\int 3x^2 dx = x^3 + c$$

olur.

$$(\sin x)' = \cos x \text{ olduğundan}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c.$$

Belirsiz İntegralin Esas Özellikleri

1.) Bir belirsiz integralin türevi, integrali alınan fonksiyona eşittir. Yani,

$$\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = \frac{d}{dx}(F(x) + c) = f(x).$$

2.) Bir belirsiz integralin diferensiyeli, integral işareti altındaki ifadenin kendisine eşittir. Yani,

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3.) Bir fonksiyonun diferensiyelinin belirsiz integrali, bu fonksiyonla keyfi sabitin toplamına eşittir.

Yani,

$$\int df(x) = f(x) + c.$$

4.) Bir integralde sabit çarpan, integral işareti dışına çıkartılabilir. $0 \neq k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$

5.) İki veya daha çok fonksiyonun cebirsel toplamının(farkının) belirsiz integrali; integrallerinin ayrı ayrı cebirsel toplamına(farkına) eşittir. Yani,

$$\int (f(x) \mp g(x))dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$$

dir. Özellik (4) ve (5) göz önüne alınırsa, a ve b reel sayılar olmak üzere,

$$\int [af(x) \mp bg(x)]dx = a \int f(x)dx \mp b \int g(x)dx$$

yazılabilir.

Örnek:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 2x + 5)dx &= \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx \\ &= \int x^2 dx - 2 \int x dx + 5 \int 1 dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + c_1 \right) - 2 \left(\frac{x^2}{2} \right) + c_2 + 5(x) + c_3 \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + c_1 + c_2 + c_3 \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + c. \end{aligned}$$

Örnek: $\int d(x^2 + x)$ belirsiz integralini hesaplayınız

Çözüm: $\int d(x^2 + x) = \int (2x + 1)dx = x^2 + x + c$ dir, özellik (3) den,

Türev konusunda gördüğümüz bağıntılar yardımıyla aşağıdaki integral formüllerini yazabiliriz:

- I. $\int dx = x + c$
- II. $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) = x^n (n \neq -1)$ olup $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
- III. $\frac{d}{dx} (\ln|x|) = \frac{1}{x}$ olup $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

- IV. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ olup $\int \cos x dx = \sin x + c$
- V. $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ olup $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- VI. $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ olup $\int \sec^2 x dx = \tan x + c$, $\frac{1}{\cos x} = \sec x$,
- VII. $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$ olup $\int \csc^2 x dx = -\cot x + c$, $\frac{1}{\sin x} = \csc x$,
- VIII. $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ olup $\int \sec x \tan x dx = \sec x + c$
- IX. $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$ olup $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + c$
- X. $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olup $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$
- XI. $\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$ olup $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$
- XII. $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$ olup $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsec}|x| + c$
- XIII. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x (\ln a)$ olup $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$, ($a > 0, a \neq 1$),

Açıklama: $y = a^x \Rightarrow \ln y = x \ln a \Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln a + 0 \Rightarrow y' = y \cdot \ln a \Rightarrow (a^x)' = a^x \ln a$ dir.

Buna göre,

$$\left(\frac{1}{\ln a} a^x\right)' = \frac{1}{\ln a} a^x \cdot \ln a + 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\ln a} a^x + c\right)' = a^x \text{ dir.}$$

- XIV. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ olup $\int e^x dx = e^x + c$
- XV. $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$ olup $\int \sinh x dx = \cosh x + c$
- XVI. $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$ olup $\int \sinh x dx = \cosh x + c$
- XVII. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + c$
- XVIII. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

Çözümlü Integral Problemleri

1.) $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + c$

2.) $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$

3.) $\int 2x^4 dx = 2 \int x^4 dx = \frac{2}{5} x^5 + c$

4.) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-1/3} dx = \frac{x^{2/3}}{2/3} + c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + c, -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

5.) $\int (x-1)\sqrt[3]{x} dx = \int x^{4/3} dx - \int x^{1/3} dx = \frac{3}{7} x^{7/3} - \frac{3}{4} x^{4/3} + c$

6.) $\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5\sin x\right) dx = 4 \int x dx - 2 \int \frac{1}{x} dx + 5 \int \sin x dx$

$$= 4 \frac{x^2}{2} - 2 \ln|x| + 5(-\cos x) + c$$

$$= 2x^2 - 2\ln|x| - 5\cos x + c$$

$$\begin{aligned}
7.) \int \left(2\sin x + 10\sqrt{x^3} + \frac{5}{x} \right) dx &= 2 \int \sin x dx + 10 \int x^{3/2} dx + 5 \int \frac{1}{x} dx \\
&= 2(-\cos x) + 10 \frac{x^{5/2}}{5/2} + 5 \ln|x| + c \\
&= -2\cos x + 4\sqrt{x^5} + 5\ln|x| + c.
\end{aligned}$$

İntegral Alma Yöntemleri

Değişken Değiştirme Yöntemi

Teorem (Değişken Değiştirme Kuralı): $u = g(x)$, I aralığında türevlenebilir bir fonksiyon ve f de I aralığında sürekli bir fonksiyon ise bu durumda

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

dur.

Örnek 1: $\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)dx = ?$

Çözüm: $x^3 + x = u$ dersek $(3x^2 + 1)dx = du$ olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\int (x^3 + x)^5(3x^2 + 1)dx &= \int u^5 du \\
&= \frac{u^6}{6} + c \\
&= \frac{(x^3 + x)^6}{6} + c
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 2: $\int \sqrt{2x+1} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $2x + 1 = u$ dersek $2dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du$ olur.

$$\int \sqrt{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{1}{3} (2x+1)^{3/2} + c$$

bulunur.

Örnek 3: $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{9-x^3}}$ integralinin hesaplanmasında $9 - x^3 = u$ değişken değiştirmesi uygulanırsa

$-3x^2 dx = du \Rightarrow x^2 dx = -\frac{1}{3} du$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{9-x^3}} = -\frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = -\frac{1}{3} \int u^{-1/3} du = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} u^{2/3} + c = -\frac{1}{2} \sqrt[3]{(9-x^3)^2} + c.$$

Örnek 4: $\int \frac{\ln x}{x} dx$ integralinde $\ln x = u$ denirse $\frac{1}{x} dx = du$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + c = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c.$$

Logaritmik İntegraller

1.) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$

2.) $\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + c.$

$x^2 + 1 = u$ dersek $2x dx = du \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$ olur.

3.) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|1 + \sin x| + c.$

$1 + \sin x = u$ dersek $\cos x dx = du$ olur.

4.) $\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\tan x| + c.$

$\tan x = u$ dersek $(1 + \tan^2 x) dx = du$ veya $\sec^2 x dx = du$ olur.

5.) $\int \frac{e^x}{1-e^x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|1 - e^x| + c$

$1 - e^x = u$ dersek $-e^x dx = du \Rightarrow e^x dx = -du$ olur.

6.) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\ln x| + c.$

$\ln x = u$ dersek $\frac{1}{x} dx = du$ olur.

7.) $\int \frac{t dt}{a+bt^2} = \frac{1}{2b} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2b} \ln|u| + c = \frac{1}{2b} \ln|a + bt^2| + c$

$a + bt^2 = u$ dersek $2b t dt = du \Rightarrow t dt = \frac{1}{2b} du$ olur.

8.) $\int \frac{\cos 2\theta}{3-\sin 2\theta} d\theta = -\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} \ln|u| + c = -\frac{1}{2} \ln|3 - \sin 2\theta| + c.$

$3 - \sin 2\theta = u \Rightarrow -2 \cos 2\theta d\theta = du \Rightarrow \cos 2\theta d\theta = -\frac{1}{2} du$ olur.

9.) $\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|e^x - e^{-x}| + c.$

$e^x - e^{-x} = u$ dersek $(e^x + e^{-x}) dx = du$ olur.

10.) $\int \frac{x^3 dx}{2x^4-3} = \frac{1}{8} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{8} \ln|u| + c = \frac{1}{8} \ln|2x^4 - 3| + c.$

$2x^4 - 3 = u$ dersek $8x^3 dx = du \Rightarrow x^3 dx = \frac{1}{8} du$ olur.

11.) $\int \frac{dx}{2x \ln 3x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + c = \frac{1}{2} \ln|\ln 3x| + c.$

$\ln 3x = u$ dersek $\frac{1}{3x} 3 dx = du \Rightarrow \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} du$ olur.

12.) $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c = \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + c = \ln|\sec x| + c.$

$\cos x = u$ dersek $-\sin x dx = du \Rightarrow \sin x dx = -du$ olur.

13.) $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sin x| + c.$

$\sin x = u$ dersek $\cos x dx = du$ olur.

Not: $\int \frac{d(f(x))}{f(x)} = \int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln|f(x)| + c$ dir. Buna göre,

$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + c.$

Üstel integraller

1.) $\int e^x dx = e^x + c$

2.) $\int e^{-x} dx = -\int e^u du = -e^u + c = -e^{-x} + c.$

$-x = u \Rightarrow dx = -du$ olur.

3.) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$

$x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$ olur.

4.) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c, a > 0, a \neq 1$ iken

5.) $\int 3^x dx = \frac{1}{\ln 3} 3^x + c.$

6.) $\int a^{3x+4} dx = \frac{1}{3} \int a^u du = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\ln a} a^u + c = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\ln a} a^{3x+4} + c.$

$3x + 4 = u \Rightarrow 3dx = du \Rightarrow dx = \frac{1}{3} du$ olur.

7.) $\int 3^{x^2} x dx = \frac{1}{2} \int 3^u du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln 3} 3^u + c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln 3} 3^{x^2} + c.$

$x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$ olur.

8.) $\int e^{x^2+\ln x} dx = \int e^{x^2} \cdot e^{\ln x} dx = \int e^{x^2} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c.$

$y = e^{\ln x} \Rightarrow \ln y = \ln x. \ln e \Rightarrow \ln y = \ln x \Rightarrow y = x$ ve $x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$ olur.

9.) $\int x^2 10^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 10^u du = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\ln 10} 10^u + c.$

$x^3 = u \Rightarrow 3x^2 dx = du \Rightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} du$ olur.

10.) $\int e^{\sqrt{x}} x^{-1/2} dx = 2 \int e^u du = 2e^u + c = 2e^{\sqrt{x}} + c.$

$\sqrt{x} = u \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = du \Rightarrow x^{-1/2} dx = 2du$ olur.

11.) $\int e^{\sin \theta} \cos \theta d\theta = \int e^u du = e^u + c = e^{\sin \theta} + c.$

$\sin \theta = u \Rightarrow \cos \theta d\theta = du$ olur.

12.) $\int \frac{4-e^x}{e^x} dx = \int \frac{4}{e^x} dx - \int dx = 4 \int e^{-x} dx - \int dx = -4e^{-x} - x + c.$

13.) $\int \sec^2 x e^{tgx} dx = \int e^u du = e^u + c = e^{tgx} + c.$

$tgx = u$ dersek $\sec^2 x dx = du$ olur.

14.) $\int (e^{x/2} + e^{-x/2}) dx = \int e^{x/2} dx + \int e^{-x/2} dx = 2 \int e^u du - 2 \int e^v dv$

$= 2e^u - 2e^v + c = 2e^{x/2} - 2e^{-x/2} + c.$

$\frac{x}{2} = u \Rightarrow \frac{1}{2} dx = du \Rightarrow dx = 2du$ ve $-\frac{x}{2} = v \Rightarrow -\frac{1}{2} dx = dv \Rightarrow dx = -2dv$ olur.

15.) $\int x^4 e^{x^5} dx = \frac{1}{5} \cdot \int e^u du = \frac{1}{5} \cdot e^u + c = \frac{1}{5} \cdot e^{x^5} + c.$

$x^5 = u \Rightarrow 5x^4 dx = du \Rightarrow x^4 dx = \frac{1}{5} du$ olur.