# BÖLÜM IV

## Rasyonelleştirme Yolu İle İntegrasyon

**V-1 Tanım:** Rasyonel olmayan yani kök işaretlerini ihtiva eden cebirsel fonksiyonlardan pek azının elemanter fonksiyonlar cinsinden integralleri alınabilir. Bunun için uygun bir değişken değiştirmesi yapmak gerekir. Rasyonel olmayan bir fonksiyonun eski değişken yerine sonuç rasyonel bir fonksiyon olacak tarzda bir değişken değiştirmesi yapmakla işe başlarız. Bu tür fonksiyonlar için iki değişik yol takip edilir.

**V-2 Yalnız $x$ in kesirli rasyonel kuvvetlerini ihtiva eden fonksiyonlar:** Bu tür fonksiyonlar için $x = u^n$ değişken değiştirmesi yapılır. Burada $n; x$ in kesirli rasyonel kuvvetlerinin paydalarının en küçük ortak katıdır.

**Örnek:** $\int \frac{x^{1/2}dx}{1+x^{3/4}}$ integralinde $\frac{1}{2}$ ve $\frac{3}{4}$ kesirlerinin paydalarının en küçük ortak katı $n = 4$ dür. O halde ifadenin rasyonelleşmesi için $x = u^4$ değişken değiştirmesi yapılır.

Böylece $x^{1/2} = u^2,\ x^{3/4} = u^3\ ve\ dx = 4u^3du$ olur.

$$\int \frac{x^{1/2}dx}{1+x^{3/4}} = \int \frac{u^2}{1+u^3} \cdot 4u^3du = 4\int \frac{u^5du}{1+u^3} = 4\int \left(u^2 - \frac{u^2}{1+u^3}\right)du$$

$$= 4\int u^2du - 4\int \frac{u^2du}{1+u^3}$$

$(1 + u^3 = v \text{ denirse } u^2du = \frac{1}{3}dv \text{ olur.})$

$$= \frac{4}{3}u^3 - \frac{4}{3}ln|v| + c$$

$$= \frac{4}{3}x^{3/4} - \frac{4}{3}ln\left|1 + x^{3/4}\right| + c,$$

**V-3 Yalnız $a + bx$ in kesirli Rasyonel kuvvetlerini ihtiva eden fonksiyonların integrasyonu:**

Bu tür ifadeler için $a + bx = u^n$ dönüşümü yapılır. Burada $n; a + bx$ in kesirli rasyonel üslerinin paydalarının en küçük ortak katıdır.

Böylece $a + bx$ ve $dx$; $u$ cinsinden yazıldığında ifade rasyonel duruma dönüşür.

**Örnek:** $\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}$ integralini hesaplayınız.

**Çözüm:** $\frac{3}{2}$ ve $\frac{1}{2}$ kesirlerinin paydalarının en küçük ortak katı $n = 2$ dür. O halde ifadenin rasyonelleşmesi için $1 + x = u^2$ değişken değiştirmesi yapılır.

Böylece $(1+x)^{1/2}=u,\ \ (1+x)^{3/2}=u^3$ ve $dx=2udu$ olur.

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{3/2}+(1+x)^{1/2}}=\int \frac{2udu}{u^3+u}=2\int \frac{du}{u^2+1}=2arctanu+c=2arctan(1+x)^{1/2}+c$$

elde edilir.

## V-4 Çözümlü Problemler

**1)** $\int \frac{dx}{x^{2/3}-x^{4/3}}=\int \frac{3u^2du}{u^2-u^4}=3\int \frac{u^2du}{u^2(1-u^2)}=3\int \frac{du}{(1-u^2)}=\frac{3}{2}ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+c=\frac{3}{2}ln\left|\frac{1+x^{1/3}}{1-x^{1/3}}\right|+c$

$\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{3}$ kesirlerinin paydalarının en küçük ortak katı $n=3$ dür. O halde ifadenin rasyonelleşmesi için $x=u^3$ değişken değiştirmesi yapılır.

Böylece $x^{2/3}=u^2,\ \ x^{4/3}=u^4$ ve $dx=3u^2du$ olur.

**II. Yol:** $\int \frac{3du}{(1-u^2)}=\int \frac{3du}{(1-u)(1+u)}=\int \frac{Adu}{1-u}+\int \frac{Bdu}{1+u}$

$$\frac{3}{(1-u)(1+u)}=\underset{(1+u)}{\frac{A}{1-u}}+\underset{(1-u)}{\frac{B}{1+u}}=\frac{A(1+u)+B(1-u)}{(1-u)(1+u)}=\frac{u(A-B)+(A+B)}{(1-u)(1+u)}$$

$3\equiv u(A-B)+(A+B)\Rightarrow \left.\begin{matrix}A-B=0\\ A+B=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow A=\frac{3}{2},\ B=\frac{3}{2}$ bulunur. Bu değerler yerlerine yazılırsa

$$\Rightarrow \int \frac{3du}{(1-u^2)}=\frac{3}{2}\int \frac{du}{1-u}+\frac{3}{2}\int \frac{du}{1+u}=-\frac{3}{2}ln|1-u|+\frac{3}{2}ln|1+u|+c$$

$$\Rightarrow \int \frac{3du}{(1-u^2)}=\frac{3}{2}ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|+c=\frac{3}{2}ln\left|\frac{1+x^{1/3}}{1-x^{1/3}}\right|+c,$$

**2)** $\int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{5/2}}=\frac{1}{2.16}\int \frac{(u^2-1)^2udu}{u^5}=\frac{1}{32}\int \frac{(u^2-1)^2du}{u^4}=\frac{1}{32}\int \frac{(u^4-2u^2+1)du}{u^4}$

$(4x+1=u^2\Rightarrow dx=\frac{1}{2}udu,\ (4x+1)^{5/2}=u^5$ ve $x=\left(\frac{u^2-1}{4}\right)$ olur.

$$\Rightarrow \int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{5/2}}=\frac{1}{32}\left[\int du-2\int \frac{du}{u^2}+\int \frac{du}{u^4}\right]=\frac{1}{32}\left[u+\frac{2}{u}-\frac{1}{3u^3}\right]+c=\frac{1}{32}\left[\frac{3u^4+6u^2-1}{3u^3}\right]+c$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{5/2}}=\frac{1}{32}\left[\frac{3(4x+1)^2+6(4x+1)-1}{3(4x+1)^{3/2}}\right]+c=\frac{1}{32}\left[\frac{48x^2+48x+8}{3(4x+1)^{3/2}}\right]+c$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2dx}{(4x+1)^{5/2}}=\frac{1}{12}\left[\frac{6x^2+6x+1}{(4x+1)^{3/2}}\right]+c,$$

**3)** $\int \frac{dx}{x^{5/8}-x^{1/8}}=\int \frac{8u^7du}{u^5-u}=8\int \frac{u^6du}{u^4-1}=8\int \left(u^2+\frac{u^2}{u^4-1}\right)du$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x^{5/8}-x^{1/8}}=8\int u^2du+\int \frac{8u^2}{(u-1)(u+1)(u^2+1)}du$$

$$= \frac{8}{3}u^3 + \int \frac{Adu}{u-1} + \int \frac{Bdu}{u+1} \int \frac{Cu+D}{u^2+1} du$$

$$8u^2 \equiv A(u+1)(u^2+1) + B(u-1)(u^2+1) + (Cu+D)(u^2-1)$$

$$8u^2 \equiv u^3(A+B+C) + u^2(A-B+D) + u(A+B-C) + (A-B-D)$$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B+C=0 \\ A-B+D=8 \\ A+B-C=0 \\ A-B-D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=2, B=-2, C=0, D=4$ bulunur. Bu değerler yerlerine yazılır ise

$$\int \frac{dx}{x^{5/8}-x^{1/8}} = \frac{8}{3}u^3 + 2\int \frac{du}{u-1} - 2\int \frac{du}{u+1} + 4\int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \frac{8}{3}u^3 + 2ln|u-1| - 2ln|u+1| + 4arctanu + c$$

$$= \frac{8}{3}x^{3/8} + 2ln\left|x^{1/8}-1\right| - 2ln\left|x^{1/8}+1\right| + 4arctanx^{1/8} + c$$

$$= \frac{8}{3}x^{3/8} + 2ln\left|\frac{x^{1/8}-1}{x^{1/8}+1}\right| + 4arctanx^{1/8} + c$$

elde edilir.

Açıklama:

$\frac{5}{8}$ ve $\frac{1}{8}$ kesirlerinin paydalarının en küçük ortak katı $n=8$ dir. O halde ifadenin rasyonelleşmesi için

$x = u^8$ değişken değiştirmesi yapılır.

Böylece $x^{5/8} = u^5,\ x^{1/8} = u$ ve $dx = 8u^7du$ olur.

**4)** $\int \frac{(5x+9)dx}{(x-9)^{1/2}} = 10\sqrt{x-9} - \frac{108}{\sqrt{x-9}} + c,$

**5)** $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x^3+2x^2-3x} = \frac{1}{4}ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| - \frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}} + c$(Ö***DEV***),

**6)** $\int \frac{xdx}{(a+bx)^{3/2}} = \frac{2(2a+bx)}{b^2\sqrt{a+bx}} + c$ (Ö***DEV***),

**7)** $\int x\sqrt[3]{a+x}\,dx = \frac{3}{7}(a+x)^{7/3} - \frac{3}{4}a(a+x)^{4/3} + c$ (Ö***DEV***),

**8)** $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx = x + 1 + 4\sqrt{x+1} + 4ln\left|\sqrt{x+1}-1\right| + c$ (Ö***DEV***),

**9)** $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+a}} = \frac{3}{2}(x+a)^{2/3} - 3(x+a)^{1/3} + 3ln\left|1+\sqrt[3]{x+a}\right| + c$ (Ö***DEV***),

# BÖLÜM VI

**VI-1** Bölüm I de $\sqrt{a^2-u^2}$ ve $\sqrt{u^2 \mp a^2}$ terimlerinden ibaret olan integralleri incelemiştik. Bu defa bu tür terimleri ihtiva eden integrallerin genel durumlarını inceleyeceğiz.

Genel olarak aşağıdaki şekilde değişken değiştirmesi yapılır.

$\sqrt{a^2-u^2}$ durumunda $u = asin\theta$,

$\sqrt{u^2+a^2}$ durumunda $u = atg\theta$,

$\sqrt{u^2-a^2}$ durumunda $u = asec\theta$.

Bu değişken değiştirmeleri ile verilen ifadeler kökten kurtulur. Çünkü;

$$\sqrt{a^2-u^2} = \sqrt{a^2-a^2sin^2\theta} = a\sqrt{1-sin^2\theta} = a\sqrt{cos^2\theta} = acos\theta,$$

$$\sqrt{u^2+a^2} = \sqrt{a^2tg^2\theta+a^2} = a\sqrt{1+tg^2\theta} = a\sqrt{secs^2\theta} = asec\theta,$$

$$\sqrt{u^2-a^2} = \sqrt{a^2sec^2\theta-a^2} = a\sqrt{sec^2\theta-1} = a\sqrt{tg^2\theta} = atg\theta.$$

Şimdi genel bir ifade alalım:

$\int u^m\sqrt{(a^2-u^2)^n}\,du$ integralinde $m$ ve $n$ ne olursa olsun, yapacağımız dönüşüm $u = asin\theta$ olacaktır. Bu nedenle

$$\sqrt{(a^2-u^2)^n} = \sqrt{(a^2-a^2sin^2\theta)^n} = a^n cos^n\theta \text{ olup}$$

$$\int u^m\sqrt{(a^2-u^2)^n}\,du = a^{m+n+1}\int sin^m\theta\, cos^{n+1}\theta d\theta$$

şeklinde trigonometrik bir integrasyona dönüşür. Bu tür integralleri Bölüm $III$ de incelediğimiz şekilde alırız.

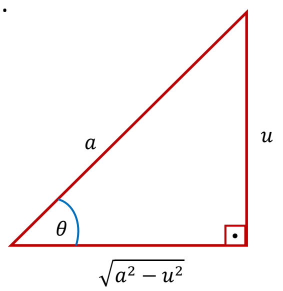
**Örnek:** $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}}$ integralini hesaplayalım:

$u = asin\theta$ değişken değiştirmesi uygulanırsa $du = acos\theta d\theta$ olur. Bu değerler yerlerine yazılırsa

$$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \int \frac{acos\theta d\theta}{(a^2-a^2sin^2\theta)^{3/2}} = \int \frac{acos\theta d\theta}{[a^2(1-sin^2\theta)]^{3/2}} = \int \frac{acos\theta d\theta}{[(acos\theta)^2]^{3/2}} =$$

$$= \int \frac{acos\theta d\theta}{a^3cos^3\theta} = \frac{1}{a^2}\int \frac{d\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{a^2}\int sec^2\theta d\theta = \frac{1}{a^2}tg\theta + c.$$

$u = asin\theta$ yaptığımıza göre $tg\theta$ yı $u$ cinsinden hesaplamamız gerekir. Bunun için $sin\theta = \frac{u}{a}$ olan bir dik üçgen alalım.




Bu dik üçgende $sin\theta = \frac{u}{a}$ olduğuna göre diğer dik kenar $\sqrt{a^2-u^2}$ olacaktır. Bu dik üçgene göre $tg\theta = \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}$ olur.

Buna göre,

$$\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}} + c$$

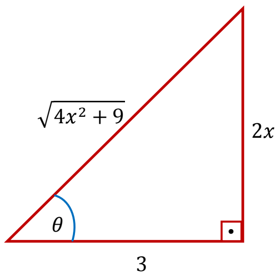
olarak genel çözüm bulunur.

**Örnek:** $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$ integralini hesaplayalım: $2x = u$ dersek $dx = \frac{1}{2}du$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2+9}} = \int \frac{du}{u\sqrt{u^2+9}} = 3\int \frac{sec^2\theta d\theta}{3tg\theta\sqrt{9(tg^2\theta+1)}} = \frac{1}{3}\int \frac{sec^2\theta d\theta}{tg\theta sec\theta} = \frac{1}{3}\int \frac{sec\theta d\theta}{tg\theta} =$$

$(u = 3tg\theta$ değişken değiştirmesi kullanılırsa $du = 3sec^2\theta d\theta$ olur.$)$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3}\int cosec\theta d\theta = \frac{1}{3}ln|cosec\theta - cotg\theta| + c.$$




$\frac{1}{sin\theta} = cosec\theta$ olduğdan, yandaki dik üçgenden

$sin\theta = \frac{2x}{\sqrt{4x^2+9}}$ dan $cosec\theta = \frac{\sqrt{4x^2+9}}{2x}$ ve $cotg\theta = \frac{3}{2x}$

olacaktır. Bu değerler yukarıdaki integralde yerlerine yazılırsa

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{3}ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x}\right| + c$$

bulunur.

## VI-2 Çözümlü Problemler

1) $\int \frac{dx}{(x^2+2)^{3/2}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2+2}} + c,$

2) $\int \frac{dx}{(5-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{5\sqrt{5-x^2}} + c,$

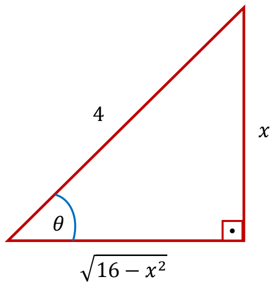
3) $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{16-16sin^2\theta}}{16sin^2\theta}4cos\theta d\theta = \int \frac{4\sqrt{1-sin^2\theta}\cdot 4cos\theta d\theta}{16sin^2\theta} = \int \frac{cos^2\theta d\theta}{sin^2\theta}$

$(x = 4sin\theta$ değişken değiştirmesi uygulanırsa $dx = 4cos\theta d\theta$ olur.$)$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx = \int cotg^2\theta d\theta = \int (1+cotg^2\theta - 1)d\theta = \int (cosec^2\theta - 1)d\theta$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx = \int cosec^2\theta d\theta - \int d\theta = -cotg\theta - \theta = -\frac{\sqrt{16-x^2}}{x} - arcsin\frac{x}{4} + c$$

elde edilir.




$sin\theta = \frac{x}{4} \Rightarrow \theta = arcsin\frac{x}{4}$,

$cotg\theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}$ olur.

**4)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-6}}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-6} + 3ln\left|x+\sqrt{x^2-6}\right| + c,$

$(x = \sqrt{6}\,sec\theta \;\Rightarrow dx = \sqrt{6}\,sec\theta tg\theta d\theta$ olur.$)$

**5)** $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2arcsin\frac{x}{2} + c,$

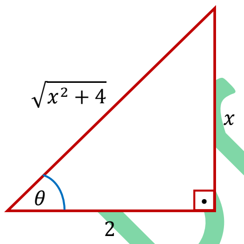
**6)** $\int \frac{x^2}{(x^2+8)^{3/2}}dx = -\frac{x}{\sqrt{x^2+8}} + ln\left|x+\sqrt{x^2+8}\right| + c,$

**7)** $\int \frac{u^2}{(9-u^2)^{3/2}}du = \frac{u}{\sqrt{9-u^2}} - arcsin\frac{u}{3} + c,$

**8)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2sec^2\theta d\theta}{2\,tg\theta\sqrt{4tg^2\theta+4}} = \int \frac{sec^2\theta d\theta}{tg\theta\cdot 2sec\theta} = \frac{1}{2}\int \frac{sec\theta d\theta}{tg\theta} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{cos\theta}\cdot\frac{cos\theta}{sin\theta}d\theta = \frac{1}{2}\int cosec\theta\, d\theta$

$(x = 2\,tg\theta \;\Rightarrow dx = 2sec^2\theta d\theta$ olur.$)$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}ln|cosec\theta - cotg\theta| + c.$




$tg\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow sin\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \Rightarrow cosec\theta = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$ ve

$cotg\theta = \frac{2}{x}$ olur. Bu değerler yukarıda yerlerine yazılırsa

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right| + c = \frac{1}{2}ln\left|\frac{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)}{x(\sqrt{x^2+4}-2)}\right| + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x^2+4-4}{x(\sqrt{x^2+4}+2)}\right| + c = \frac{1}{2}ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+4}+2}\right| + c$$

elde edilir.

**9)** $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}} = \frac{1}{5}ln\left|\frac{x}{5+\sqrt{25-x^2}}\right| + c,$

**10)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-7}} = \frac{\sqrt{x^2-7}}{7x} + c,$

**11)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{5-x^2}} = -\frac{\sqrt{5-x^2}}{5x} + c,$

**12)** $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{18x^2} + \frac{1}{54} arcsec\frac{x}{3} + c,$

**13)** $\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - arcsin\frac{x}{a} + c,$

**14)** $\int \frac{dx}{(16+x^2)^2} = \frac{1}{128} arctg\frac{x}{4} + \frac{x}{32(16+x^2)} + c,$

**15)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + c,$

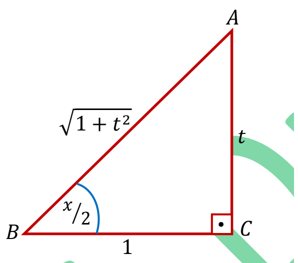
**16)** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c,$

**17)** $\int x^3\sqrt{a^2-x^2}dx = -\left(\frac{2a^2+32}{a}\right)(a^2-x^2)^{3/2} + c,$

**18)** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4x-x^2}} = 6arcsin\frac{x-2}{2} - \left(\frac{x+6}{2}\right)\sqrt{4x-x^2} + c,$

## VI-3 Trigonometrik Rasyonel İfadelerin İntegrali

Bu tür integrallerin hesaplanmasında genel olarak; $t = tg\frac{x}{2}$ dönüşümü kullanılır. Buna güre de $sinx, cosx$ ve $dx$ değerleri hesaplanır. Aşağıdaki $ABC$ dik üçgeninde $m(\widehat{ABC}) = \frac{x}{2}$ seçilirse




$tg\frac{x}{2} = t$ ifadesine göre $|AC| = t$ ve $|BC| = 1$ dir. Buna göre $|AB| = \sqrt{1+t^2}$ olur.

$sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ve $cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} = \frac{t}{1+t^2}$ dir. $2sinx \cdot cosx = sin2x$ olduğundan

$sin\frac{x}{2} \cdot cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}sinx$ dir. Dolayısıyla $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$ dir.

$cosx = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2} - \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ bulunur. Ayrıca

$tg\frac{x}{2} = t$ den $dt = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)dx \Rightarrow dt = \frac{1}{2}(1+t^2)dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ elde edilir.

Yukarıdaki ifadeleri toparlarsak;

$tg\frac{x}{2} = t$ ise $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$, $cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ olarak alınır ve uygun şekilde düzenleme yapılır.

**Örnek:** $\int \frac{dx}{5+4sin2x}$ integralinde, önce $2x = u$ alırsak $dx = \frac{1}{2}du$ olur. Buna göre,

$\int \frac{dx}{5+4sin2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{5+4sinu}$ elde edilir. Burada $tg\frac{u}{2} = t$ değişken değiştirmesi uygulanırsa $du = \frac{2dt}{1+t^2}$, $sinu = \frac{2t}{1+t^2}$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\int \frac{dx}{5+4sin2x} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{5+4sinu} = \frac{1}{2}\int \frac{2dt/_{1+t^2}}{5+\frac{8t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{5t^2+8t+5} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2+\frac{8}{5}t+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{5+4sin2x} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dz}{z^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3}\arctan\left(\frac{\frac{5t+4}{5}}{3/5}\right)+c$$

$\left(t+\frac{4}{5} = z \Rightarrow dt = dz \text{ olur.}\right)$

$\Rightarrow \int \frac{dx}{5+4sin2x} = \frac{1}{3}arctan\left(\frac{5t+4}{3}\right)+c = \frac{1}{3}arctan\left(\frac{5tgx+4}{3}\right)+c$ elde edilir.

$\left(tg\frac{u}{2} = t \Rightarrow tg\frac{2x}{2} = t \Rightarrow tgx = t \text{ olur.}\right)$

## VI-4 Çözümlü Problemler

**1)** $\int \frac{d\theta}{1+sin\theta+cos\theta} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = ln|1+t|+c$

$$\left(tg\frac{\theta}{2} = t \text{ dersek } d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ olur.}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\theta}{1+sin\theta+cos\theta} = ln\left|1+tg\frac{\theta}{2}\right|+c,$$

**2)** $\int \frac{dx}{sinx+tgx} = \frac{1}{2}ln\left|tg\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2}+c,$

**3)** $\int \frac{dx}{5+4cosx} = \frac{2}{3}arctg\left(\frac{1}{3}tg\frac{x}{2}\right)+c,$

**4)** $\int \frac{dx}{4+5cosx} = \frac{1}{3}ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}+3}{3-tg\frac{x}{2}}\right|+c,$

**5)** $\int \frac{dx}{3+cosx} = \frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}tg\frac{x}{2}\right)+c,$

**6)** $\int \frac{dx}{2sinx-cosx+3} = arctg\left(1+2tg\frac{x}{2}\right)+c,$

**7)** $\int \frac{cos\theta d\theta}{5-3cos\theta} = -\frac{\theta}{3}+\frac{5}{6}arctg\left(2tg\frac{\theta}{2}\right)+c,$

**8)** $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}dx = ?$ (ÖDEV)

**9)** $\int \frac{dx}{1+3cos^2 2x} = ?$ (ÖDEV)

**10)** $\int \frac{d\theta}{5sec\theta-4} = ?$ $(ÖDEV)$

**11)** $\int \frac{dx}{1+2sinx} = ?$ $(ÖDEV)$

**12)** $\int \frac{d\theta}{2+sin\theta} = ?$ $(ÖDEV)$

**13)** $\int \frac{dx}{1sinx-cosx} = ?$ $(ÖDEV)$

**14)** $\int \frac{dx}{3+cosx} = ?$ $(ÖDEV)$

**15)** $\int \frac{cosx}{1+cosx} dx = ?$ $(ÖDEV)$

# BÖLÜM $VII$

## BELİRLİ İNTEGRAL

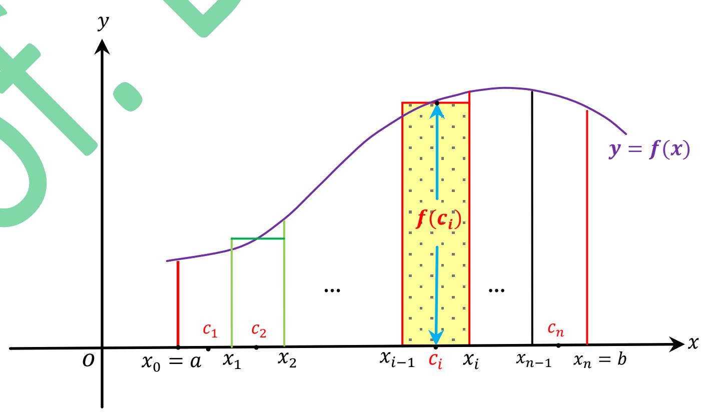
$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli veya parçalı sürekli olsun. $[a,b]$ aralığını, seçimi tamamen keyfi olmak üzere $x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_{n-1}$ noktaları ile $n$ tane aralığa bölelim. $a = x_0, \ b = x_n$ olsun. Bu alt aralıklardan ilkinde bir $c_1$ , ikincisinde bir $c_2$ , üçüncüsünde bir $c_3$ , . . . ve nihayet sonuncusunda bir $c_n$ noktası seçelim. $c_i$ noktalarının seçimi de, yine $c_i$ noktaları $i-$yinci aralığa ait olmak üzere, tamamen keyfidir. $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ yazıp,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (VII-1)$$

toplamını oluşturalım. Alt aralıklardan boyu en uzun olanının (örneğin birinci alt aralığın boyu $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \ i-\text{yinci aralığın boyu } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$) sıfıra yaklaşmasını sağlayacak tarzda alt aralık sayısını sınırsız olarak artıralım. Bir başka ifade ile $(VII-1)$ de $\Delta x_i \to 0$ olmasını sağlayacak tarzda $n \to \infty$ için limite geçelim. Mevcut olması halinde bu limite $f(x)$ fonksiynunun $a$ dan $b$ ye kadar Riemann anlamında belirli integrali denir ve

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (VII-2)$$

yazılır. $f(x)$ fonksiyonuna ise $[a,b]$ kapalı aralığında integre edilebilir bir fonksiyon denir. Burada $a$ ve $b$ ye sırasıyla, integralin alt ve üst sınırları denir.



## $VII - 1$ Belirli İntegralin Özellikleri

**1)** $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ dır. Burada $F'(x) = f(x)$,

**2)** $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$,

**3)** $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

**4)** $c$ keyfi bir sabit olmak üzere

$\int_a^b cf(x)dx = c\int_b^a f(x)dx$,

**5)** $\int_a^b [f(x) \mp g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$,

**6)** $a < c < b$ için

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

**Örnek 1:** $c$ sabit bir sayı olmak üzere

$\int_a^b cdx = c(b-a)$ olduğunu gösterelim:

$a \le x \le b$ aralığının uzunluğunu $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olacak şekilde $n$ tane eşit aralığa bölelim. İntegral fonksiyonu $f(x) = c$ olduğundan $i.$ inci aralıkta alınan herhangi bir $c_i$ değeri için $f(c_i) = c$ olacaktır.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

$\Rightarrow S_n = \underbrace{c\Delta x + c\Delta x + \cdots + c\Delta x}_{n-tane} = n.c\Delta x = n \cdot c \cdot \frac{b-a}{n} = c(b-a)$ olur. Buna göre,

$\int_b^b cdx = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} c(b-a) = c \cdot (b-a)$ elde edilir.

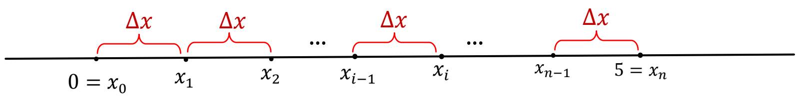
Bu ifade direk olarak integral yardımıyla

$$\int_a^b cdx = cx\Big|_a^b = cb - ca = c(b-a)$$

elde edilir.

**Örnek 2:** $\int_0^5 xdx = \frac{25}{2}$ olduğunu gösterelim.

**Çözüm:** $0 \leq x \leq 5$ aralığının uzunluğu 5 birim olup, $n$ tane eşit aralığa böler isek her aralık $\Delta x = \frac{5}{n}$ olur.




$x_1 - x_0 = x_1 = \Delta x, x_2 - x_0 = x_2 = 2\Delta x, x_i - x_0 = x_i = i\Delta x, \ldots, x_n - x_0 = x_n = n\Delta x$ yazılabilir.

Buradan,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (i\Delta x)\Delta x = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)(\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right) = \frac{25}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right).$$

$$\int_0^5 xdx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{25}{2}\left(n + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{25}{2}$$

elde edilir. Zira integral alarak da

$$\int_0^5 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$$

bulunur.

## Örnekler

**1)** $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} arctan \frac{x}{2} \Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi)\right] = \frac{\pi}{4}$

**2)** $\int_1^e lnxdx = \left[xlnx - x \Big|_1^e\right] = (elne - e) - (1ln1 - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 1$

$\left(u = lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx; dv = dx \Rightarrow v = x \text{ olur.} \int lnxdx = xlnx - \int x\frac{1}{x}dx = xlnx - x \text{ bulunur.}\right)$

**3)** $\left.\begin{matrix} x = 6cos\theta \\ y = 2sin\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_3^6 xydx = ?$

$x = 6cos\theta \Rightarrow dx = -6sin\theta d\theta$. Ayrıca sınırları da $\theta$ ya göre bulmalıyız:

$6 = 6cos\theta \Rightarrow \theta = 0$ ve $3 = 6cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ olur.

$$\int_3^6 xydx = \int_{\pi/3}^0 6cos\theta 2sin\,\theta(-6sin\theta)d\theta = -72\int_{\pi/3}^0 sin^2\theta cos\theta d\theta = -\frac{72}{3}sin^3\theta\Big|_{\pi/3}^{0}$$

$$\Rightarrow \int_3^6 xydx = -24sin^3\theta\Big|_{\pi/3}^{0} = \left(0 + 24sin^3\frac{\pi}{3}\right) = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 9\sqrt{3}.$$