BÖLÜM VII

BELİRLİ İNTEGRAL

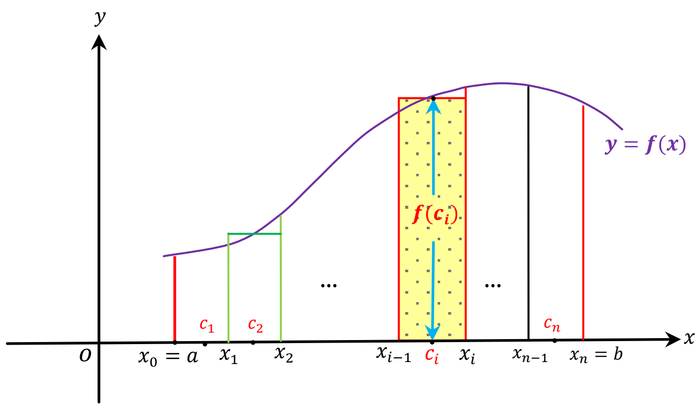
$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli veya parçalı sürekli olsun. $[a, b]$ aralığını, seçimi tamamen keyfi olmak üzere $x_1, x_2, \ . \ . \ . \ , x_{n-1}$ noktaları ile n tane aralığa bölelim. $a = x_0, \ b = x_n$ olsun. Bu alt aralıklardan ilkinde bir c_1 , ikincisinde bir c_2 , üçüncüsünde bir c_3 , . . . ve nihayet sonuncusunda bir c_n noktası seçelim. c_i noktalarının seçimi de, yine c_i noktaları $i -$ yinci aralığa ait olmak üzere, tamamen keyfidir. $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$ yazıp,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \qquad (VII - 1)$$

toplamını oluşturalım. Alt aralıklardan boyu en uzun olanının (örneğin birinci alt aralığın boyu $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $i -$ yinci aralığın boyu $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$) sıfıra yaklaşmasını sağlayacak tarzda alt aralık sayısını sınırsız olarak artıralım. Bir başka ifade ile $(VII - 1)$ de $\Delta x_i \to 0$ olmasını sağlayacak tarzda $n \to \infty$ için limite geçelim. Mevcut olması halinde bu limite $f(x)$ fonksiynunun a dan b ye kadar Riemann anlamında belirli integrali denir ve

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \qquad (VII - 2)$$

yazılır. $f(x)$ fonksiyonuna ise $[a, b]$ kapalı aralığında integre edilebilir bir fonksiyon denir. Burada a ve b ye sırasıyla, integralin alt ve üst sınırları denir.



$VII-1$ Belirli İntegralin Özellikleri

1) $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ dır. Burada $F'(x) = f(x)$,

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$,

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$,

4) c keyfi bir sabit olmak üzere

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

5) $\int_a^b [f(x) \mp g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b g(x)dx$,

6) $a < c < b$ için

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Örnek 1: c sabit bir sayı olmak üzere

$\int_a^b cdx = c(b-a)$ olduğunu gösterelim:

$a \le x \le b$ aralığının uzunluğunu $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olacak şekilde n tane eşit aralığa bölelim. İntegral fonksiyonu $f(x) = c$ olduğundan i. inci aralıkta alınan herhangi bir c_i değeri için $f(c_i) = c$ olacaktır.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots + f(c_n)\Delta x_n$$

$\Rightarrow S_n = \underbrace{c\Delta x + c\Delta x + \cdots + c\Delta x}_{n-tane} = n.c\Delta x = n \cdot c \cdot \frac{b-a}{n} = c(b-a)$ olur. Buna göre,

$\int_b^b cdx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} c(b-a) = c \cdot (b-a)$ elde edilir.

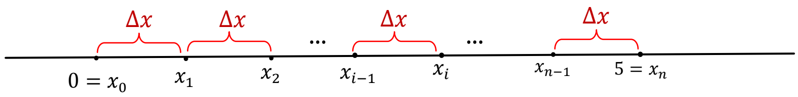
Bu ifade direk olarak integral yardımıyla

$$\int_a^b cdx = cx\Big|_a^b = cb - ca = c(b-a)$$

elde edilir.

Örnek 2: $\int_0^5 xdx = \frac{25}{2}$ olduğunu gösterelim.

Çözüm: $0 \leq x \leq 5$ aralığının uzunluğu 5 birim olup, n tane eşit aralığa böler isek her aralık $\Delta x = \frac{5}{n}$ olur.



$x_1 - x_0 = x_1 = \Delta x, x_2 - x_0 = x_2 = 2\Delta x, x_i - x_0 = x_i = i\Delta x, \dots, x_n - x_0 = x_n = n\Delta x$ yazılabilir.

Buradan,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (i\Delta x)\Delta x = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)(\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(\frac{n^2+n}{n^2}\right) = \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$\int_0^5 xdx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] = \frac{25}{2}$$

elde edilir. Zira integral alarak da

$$\int_0^5 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$$

bulunur.

Örnekler

1) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} arctan \frac{x}{2} \Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi)\right] = \frac{\pi}{4}$

2) $\int_1^e lnxdx = \left[xlnx - x \Big|_1^e\right] = (elne - e) - (1ln1 - 1) = (e - e) - (0 - 1) = 1$

$\left(u = lnx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx; dv = dx \Rightarrow v = x \text{ olur.} \int lnxdx = xlnx - \int x\frac{1}{x}dx = xlnx - x \text{ bulunur.}\right)$

3) $\left.\begin{aligned} x &= 6cos\theta \\ y &= 2sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_3^6 xydx = ?$

$x = 6cos\theta \Rightarrow dx = -6sin\theta d\theta$. Ayrıca sınırları da θ ya göre bulmalıyız:

$6 = 6cos\theta \Rightarrow \theta = 0$ ve $3 = 6cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ olur.

$$\int_3^6 xydx = \int_{\pi/3}^0 6cos\theta 2sin\,\theta(-6sin\theta)d\theta = -72\int_{\pi/3}^0 sin^2\theta cos\theta d\theta = -\frac{72}{3}sin^3\theta\Big|_{\pi/3}^{0}$$

$$\Rightarrow \int_3^6 xydx = -24sin^3\theta\Big|_{\pi/3}^{0} = \left(0 + 24sin^3\frac{\pi}{3}\right) = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 9\sqrt{3}.$$

4) $$\int_0^{\pi/3}\frac{dx}{1-sinx} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = \underbrace{\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{2dt}{(1-t)^2}}_{(1-t=u\Rightarrow dt=-du)} = \frac{2}{1-t}\Big|_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{2}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} - 2 = 1+\sqrt{3}$$ bulunur.

$\left(tg\frac{x}{2} = t \text{ dersek } dx = \frac{2dt}{1+t^2}, sinx = \frac{2t}{1+t^2} \text{ olur.}\right)$

Ayrıca $x = 0$ için $tg\frac{x}{2} = tg0 = 0 \Rightarrow t = 0, x = \pi/3$ için $tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ dir.

5) $$\int_0^{2\pi/3}\frac{d\theta}{5+4cos\theta} = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{2dt}{9+t^2} = \left[\frac{2}{3}arctg\frac{t}{3}\right]\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\left[arctg\frac{\sqrt{3}}{3} - arctg\frac{0}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi/3}\frac{d\theta}{5+4cos\theta} = \frac{2}{3}arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9}$$ bulunur.

$$\left(tg\frac{\theta}{2} = t \text{ dersek } d\theta = \frac{2dt}{1+t^2}, \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ olur.}\right)$$

t' ye göre integral sınırlarını belirleyelim: $\theta = 0$ için $t = 0$ ve $\theta = \frac{2\pi}{3}$ için $tg\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} = t$ dır.

$arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = t \Rightarrow tant = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ olur.

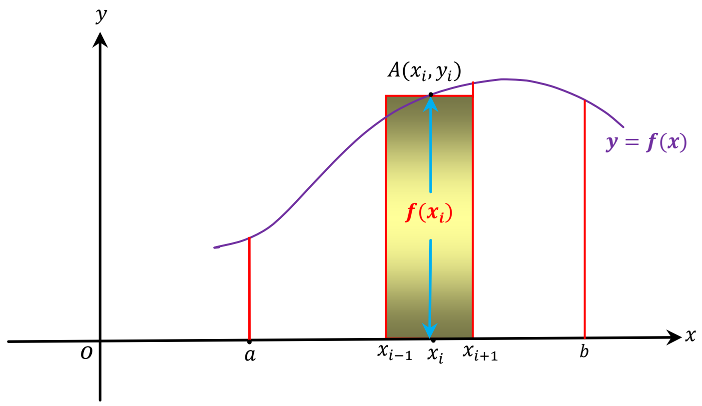
$VII - 2$ İntegrallerle Düzlemsel Alanların Hesaplanması

Bir Eğri Altında Kalan Alanın $x-$ eksenine Göre Hesaplanması:

Verilen bir $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli olsun. $a \leq x \leq b$ için $f(x)$ pozitif ise;

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

belirli integraline geometrik bir yorum vermeye çalışalım:



Şekildeki taralı dikdörtgende $x_{i+1} - x_{i-1} = \Delta x_i$ tabanı ve $f(x_i)$ yüksekliği gösterirse bu dikdörtgenin alanı

$$\Delta A_i = f(x_i)\Delta x_i$$

olacaktır.

$[a,b]$ kapalı aralığında bu dikdörtgenlerden $n-$ tane alıp toplarsak

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

gibi $n-$ tane dikdörtgenin alanları toplamı bulunur. Bu dikdörtgenlerin sayısı sonsuza giderken toplamın limiti; $x = a,\ x = b, x-$ ekseni ve $f(x)$ eğrisi ile sınırlı olan alanı verecektir. Yani,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

elde edilir. $f(x) = y$ alınırsa, $x-$ eksenine göre alan ;

$$A_x = \int_a^b y dx$$

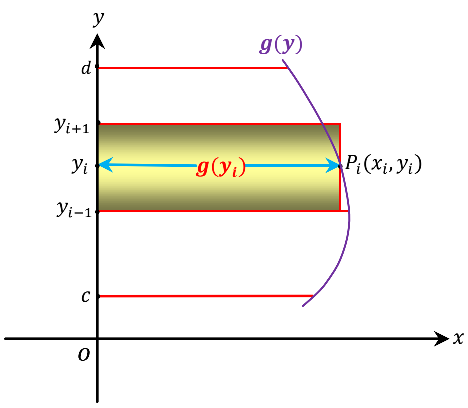
olur.

Bir Eğri Altında Kalan Alanın $y-$ eksenine Göre Hesaplanması:

Verilen bir $g(y)$ fonksiyonu $[c, d]$ aralığında tanımlı, pozitif ve sürekli olsun. $y_{i+1} - y_{i-1} = \Delta y_i$ olmak üzere şekildeki taralı dikdörtgenin alanı

$$\Delta A_i = g(y_i)\Delta y_i$$

olacaktır.



$[c, d]$ aralığında bu dikdörtgenlerden $n-$ tane alıp toplarsak

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} g(y_i)\Delta y_i$$

gibi $n-$ tane dikdörtgenin alanları toplamı bulunur. Bu dikdörtgenlerin sayısı sonsuza giderken toplamın limiti; $y = c, y = d, y-$ ekseni ve $g(y)$ eğrisi ile sınırlı olan alanı verecektir. Yani,

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(y_i)\Delta y_i = \int_c^d g(y)dy$$

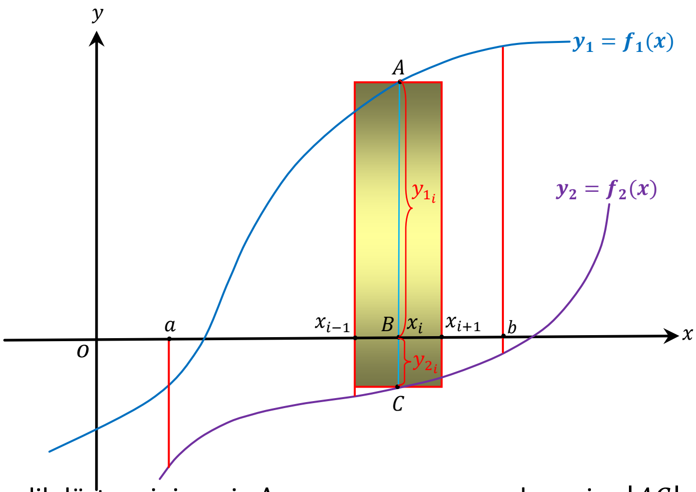
elde edilir. $g(y) = x$ alınırsa, $y-$ eksenine göre alan ;

$$A_y = \int_c^d x dy$$

olur.

Not: $f(x) < o$ ise $A_x = -\int_a^b f(x)dx$, $g(y) < o$ ise $A_y = -\int_c^d g(y)dy$.

İki Eğri Arasındaki Alan:



Yaklaşım dikdörtgeninin eni $\Delta x_i = x_{i+1} - x_{i-1}$ ve boyu ise $|AC| = |AB| + |BC|$ olup

$|AC| = f_1(x_i) - f_2(x_i) = y_{1_i} - y_{2_i}$ dir. Yaklaşım dikdörtgenin alanı;

$$\Delta A_i = \big(f_1(x_i) - f_2(x_i)\big)\Delta x_i = \big(y_{1_i} - y_{2_i}\big)\Delta x_i.$$

$[a, b]$ aralığında bu dikdörtgenlerden $n-$ tane alıp toplarsak

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} (y_{1_i} - y_{2_i})\Delta x_i$$

elde edilir. Bu dikdörtgenlerin sayısı sonsuza giderken limitini alırsak;

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (y_{1_i} - y_{2_i})\Delta x_i = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

elde edilir. Buna göre, $x-$eksenine göre alan ;

$$A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)dx$$

olur.

Eğer fonksiyonlar $x_1 = g_1(y)\ ve\ x_2 = g_2(y)$ şeklinde verilir ve $y-$eksenine göre alan hesaplanırsa

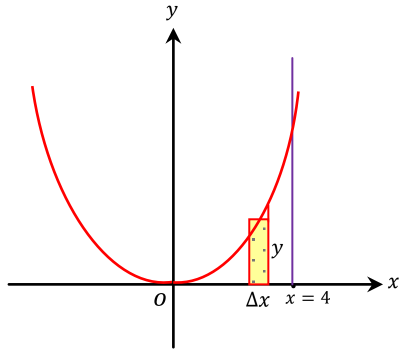
$$A_y = \int_c^d (x_1 - x_2)dy$$

olur.

$VII - 3$ Çözümlü Problemler

1) $y = \frac{x^2}{4}$ eğrisi, $x-$ ekseni ve $x = 4$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:

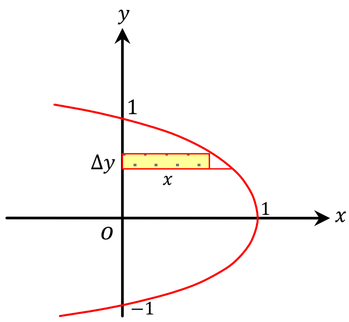


$$A = \int_0^4 y dx = \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{4} \left| \frac{x^3}{3} \right| \Big|_0^4$$

$$\Rightarrow A = \frac{16}{3} \text{ birim karedir.}$$

2) $x = 1 - y^2$ eğrisi ile $y-$ ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:

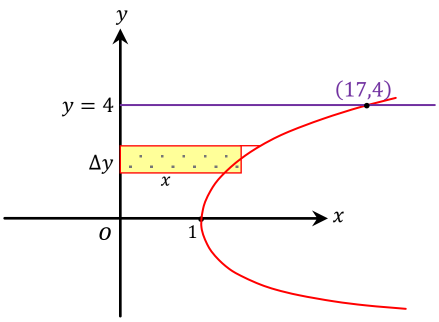


$$A = \int_{-1}^{1} x dy = \int_{-1}^{1} (1 - y^2) dy = 2 \int_0^1 (1 - y^2)\, dy$$

$$\Rightarrow A = 2 \left| y - \frac{y^3}{3} \right| \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \text{ birim karedir.}$$

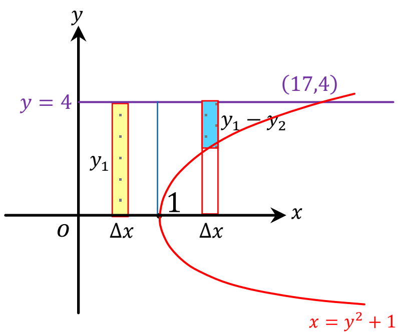
3) $x = y^2 + 1$ eğrisi ile $x, y-$ eksenleri ve $y = 4$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: I. Yol:



$$A = \int_0^4 x dy = \int_0^4 (y^2 + 1) dy = \frac{y^3}{3} + y \Big|_0^4 = \frac{76}{3} br^2$$

II. Yol:



$$A = \int_0^1 y_1 dx + \int_1^{17} (y_1 - y_2) dx$$

$$= \int_0^1 4dx + \int_1^{17} [4 - (x-1)^{1/2}] dx$$

$$= 4x \Big|_0^1 + 4x \Big|_1^{17} - \int_1^{17} (x-1)^{1/2} dx$$

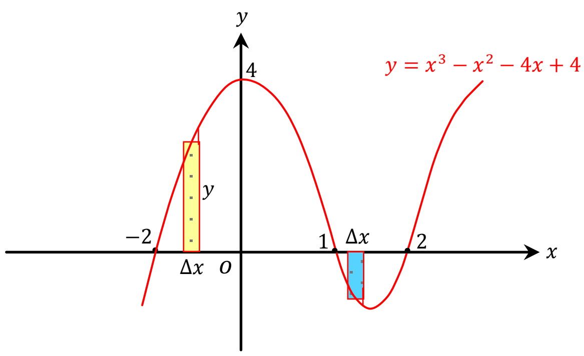
$(x - 1 = u \Rightarrow dx = du, x = 17 \text{ için } u = 16 \text{ ve } x = 1 \text{ için } u = 0)$

$$\Rightarrow \; A = 4 + 4(17-1) - \int_0^{16} u^{1/2}du = 68 - \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^{16} = 68 - \frac{2}{3}\left[(2^4)^{3/2}\right] = \frac{76}{3}\; br^2$$

4) $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$ eğrisi ile $x -$ ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: $y = x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4)$

$y = 0$ için $x = 1, x = \mp 2$ ve $x = 0$ için $y = 4$ olur. Bu fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekildeki taralı alanın bir bölümü $x -$ ekseninin altındadır. Bu nedenle ilgili alanları ayrı ayrı bulmak zorundayız.

$$A = \int_{-2}^{1} ydx + \int_{1}^{2}(-y)dx = \int_{-2}^{1} ydx - \int_{1}^{2} ydx$$

$$A = \int_{-2}^{1}(x^3 - 3x^2 - 4x + 4\,)dx - \int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 - 4x + 4\,)dx$$

$$A = \left|\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right|\Big|_{-2}^{1} + \left|-\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\right|\Big|_{1}^{2}$$

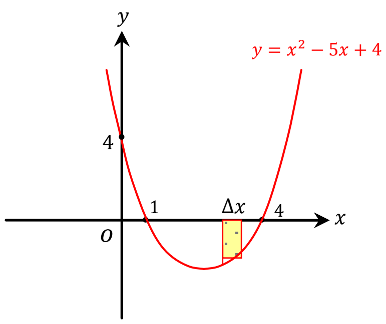
$$A = \frac{133}{12} + \left|-\left(-\frac{7}{12}\right)\right| = \frac{35}{3}br^2$$

Not: Yukarıdaki integral $\int_{-2}^{2} ydx$ şeklinde alınamaz. $x -$ ekseni altında kalan alan negatif olduğundan, bir bütün olarak integral alındığında pozitif alandan negatif olan alan kendiliğinden çıkarılmış olur. Alanın negatif olamayacağı dikkate alınarak integralleri ayrı ayrı alıp sonuçları mutlak değerli olarak pozitifleştiririz.

5) $y = x^2 - 5x + 4$ eğrisi ile $x -$ ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: $x^2 - 5x + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ şeklinde yazabiliriz.

$$A = \int_{1}^{4}(-y)dx = \int_{1}^{4} -(x^2 - 5x + 4)dx = \frac{9}{2}br^2$$

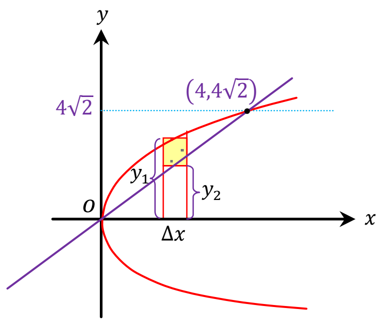


6) $y^2 = 8x$ parabolü ile $y = \sqrt{2}x$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm: Tanıtıcı dikdörtgenin alanı; $A_1 = (y_1 - y_2)\Delta x$ dir. İstenen alana A dersek,

$$A = \int_0^4 (y_1 - y_2)dx = \int_0^4 (2\sqrt{2x} - \sqrt{2}x)dx$$

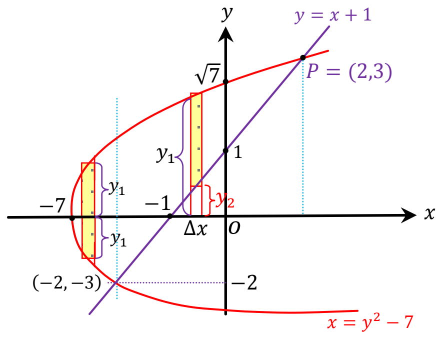
$$A = \sqrt{2}\int_0^4 (2x^{1/2} - x)dx = \frac{8\sqrt{2}}{3} br^2$$



7) $x = y^2 - 7$ eğrisi ile $y = x + 1$ doğrusu arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:

Şekilde görüldüğü gibi $-7 \leq x \leq -3$ aralığında tanıtıcı dikdörtgenin boyu $2y_1$ dir. $-3 \leq x \leq 2$ aralığında tanıtıcı dikdörtgenin boyu $y_1 - y_2$ dir. Bu durumda ilgili alanları ayrı ayrı bulup toplamamız gerekir.



$$A_1 = \int_{-7}^{-3} 2y_1 dx = 2\int_{-7}^{-3} \sqrt{x+7}dx$$

$$A_1 = \frac{4}{3}\left|\left(\sqrt{x+7}\right)^3\right| \Big|_{-7}^{-3} = \frac{32}{3} br^2$$

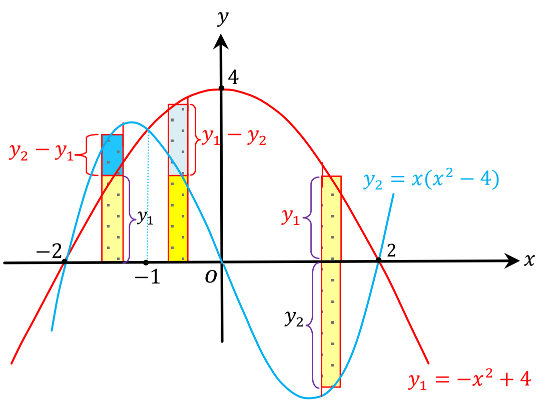
$$A_2 = \int_{-3}^{2} (y_1 - y_2)dx = \int_{-3}^{2}\left[\sqrt{x+7} - (x+1)\right]dx = \left|\frac{2}{3}\left(\sqrt{x+7}\right)^3 - \frac{x^2}{2} - x\right| \Big|_{-3}^{2} = \frac{61}{6} br^2 \text{ dir.}$$

Toplam alana A dersek $A = A_1 + A_2$ den

$A = \frac{125}{6}\ br^2$ bulunur.

8) $y = x(x^2 - 4)$ eğrisi ile $y = -x^2 + 4$ parabolü arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:



Verilen iki eğri apsisleri $-2, -1$ ve 2 olan noktalarda kesişirler. Şekilde görüldüğü gibi aralarında iki alan oluşur. Birinci alan,

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (y_2 - y_1)dx$$

olarak alınırken; ikinci alan

$$A_2 = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx$$

olarak alınacaktır. Burada,

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (y_2 - y_1)dx = \int_{-2}^{-1} (x^3 - 4x + x^2 - 4)dx = \frac{21}{36} br^2$$

ve

$$A_2 = \int_{-1}^{2} (y_1 - y_2)dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4 - x^3 + 4x)dx = \frac{45}{4} br^2$$

elde edilir. Buna göre istenen alan

$$A = A_1 + A_2 = \frac{21}{36} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} br^2$$

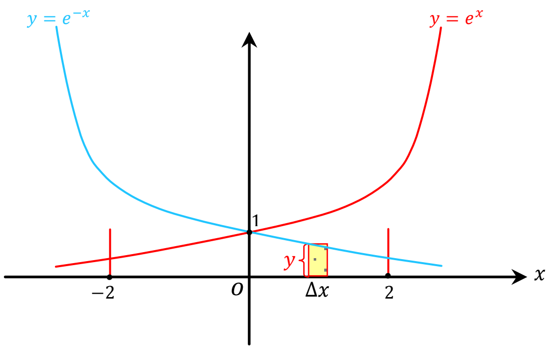
dir.

9) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ eğrileri ile $x = 2, x = -2$ doğruları ve $x -$ ekseni arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:

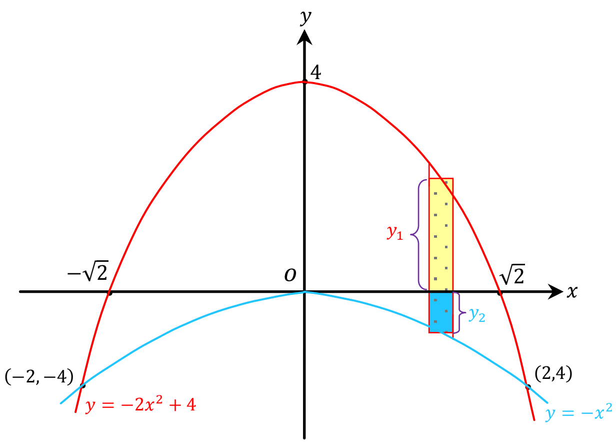
$$A = 2\int_0^2 y\,dx = 2\int_0^2 e^{-x}dx = 2|-e^{-x}|\Big|_0^2$$

$$A = 2(e^2 - 1)br^2$$



10) $y = -x^2$ ve $y = -2x^2 + 4$ eğrileri arasında kalan alanı bulunuz.

Çözüm:



$$A = 2\int_0^2 (y_1 - y_2)dx = 2\int_0^2 [-2x^2 + 4 - (-x^2)]dx$$

$$A = 2\int_0^2 (-x^2 + 4)dx = \left|2\left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right)\right| \begin{matrix} 2 \\ | \\ 0 \end{matrix} = \frac{32}{3}br^2$$