

BELİRSİZ ŞEKİLLER

Bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki limiti hesaplanırken belirsiz ifadeler denilen

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

ifadelerinden biri karşımıza çıkabilir. Bu belirsiz şekiller türev yardımıyla kolayca hesaplanır.

<i>Belirsiz şekil</i>	<i>Limit</i>
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} 2(x - 1) = -4$
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - (1/x^2)}{2 + (1/x^2)} = \frac{3}{2}$

L'Hopital's Kuralı

Teorem. f ve g fonksiyonları bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı, sürekli ve $c \in (a, b)$ noktası hariç (a, b) aralığında türevlenebilir fonksiyonlar olsunlar. Yine her $x \in (a, b)$ noktası için $g'(x) \neq 0$

olduğunu kabul edelim. Eğer $x \rightarrow c$ için $\frac{f(x)}{g(x)}$ in limiti $\frac{0}{0}$ belirsizliğine sahipse, bu takdirde

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur. Bu sonuç

$$\infty/\infty, (-\infty)/\infty, \infty/(-\infty), \text{ veya } (-\infty)/(-\infty).$$

belirsiz şekillerinden biri için de kullanılır.

$\frac{0}{0}$ Belirsiz şekli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}, \quad \text{limitini hesaplayalım.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} \quad \begin{array}{l} \nearrow \lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} - 1) = 0 \\ \searrow \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \end{array}$$

$\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. Dolayısıyla L'Hopital's kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx}[e^{2x} - 1]}{\frac{d}{dx}[x]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

elde edilir.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsiz şekli

Örnek. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ limitini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}[\ln x]}{\frac{d}{dx}[x]} && \infty/\infty \text{ belirsizliği var.} \\ &&& \text{L'Hôpital's uygulanırsa} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0. \end{aligned}$$

NOT: Bazen L'Hopital's kuralını ard arda birkaç kez uygulamak gerekebilir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$ ∞/∞ belirsizliği var. L'Hopital's kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{d}{dx}[x^2]}{\frac{d}{dx}[e^{-x}]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}$$

elde edilir. Burada da $(-\infty)/(-\infty)$ belirsizliği vardır. Tekrar L'Hopital's kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{d}{dx}[2x]}{\frac{d}{dx}[-e^{-x}]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$$

bulunur.

$0 \cdot \infty$ Belirsiz şekli

Eğer limit $0 \cdot \infty$ belirsizliğine sahipse, bu belirsizlik $f \cdot g = \frac{g}{\frac{1}{f}}$ eşitliği

yardımıyla $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ şekline dönüştürülmeye çalışılır.

Örnek.

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sqrt{x}$ $0 \cdot \infty$ belirsizliği var. Eğer limit yeniden yazılırsa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \quad \frac{0}{\infty} \text{ belirsizliği olur.}$$

Şimdi L'Hopital's Kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/(2\sqrt{x})}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x} e^x} = 0.$$

$\infty - \infty$ Belirsiz şekli

Eğer limit $\infty - \infty$ belirsizliğine sahipse, bu belirsizlik

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{f \cdot g}} \text{ eşitliği yardımıyla } \frac{0}{0} \text{ şekline dönüştürülmeye çalışılır.}$$

Örnek.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x - 1 - \ln x}{(x - 1) \ln x} \right] \quad \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{d}{dx}[x - 1 - \ln x]}{\frac{d}{dx}[(x - 1) \ln x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1 - (1/x)}{(x - 1)(1/x) + \ln x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - 1}{x - 1 + x \ln x} \right) \quad \frac{0}{0} \end{aligned}$$

olup, tekrar L'Hopital's kuralı uygulanırsa

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{1 + x(1/x) + \ln x} \right] = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

1^∞ , 0^0 ve ∞^0 Belirsizlikleri

x değişkeni sonlu bir değere veya sonsuza yaklaştığında $y = (f(x))^{g(x)}$ fonksiyonu bu belirsiz hallerden birini veriyorsa her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

elde edilir. Böylece bu belirsizlikler $0 \cdot \infty$ haline dönüşür. Eğer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lambda \quad \text{ise} \quad \lim_{x \rightarrow 0} y = e^\lambda \quad \text{olur.}$$

1^∞ Belirsiz şekli

Örnek.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ limitini hesaplayalım.

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\ln y = \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]$$

$$\ln y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] \quad \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\ln[1 + (1/x)]}{1/x} \right) \quad 0/0$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(-1/x^2)\{1/[1 + (1/x)]\}}{-1/x^2} \right) \quad \text{L'Hôpital's}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + (1/x)} = 1$$

Böylece $\ln y = 1$, buradan da $y = e$ elde edilir. O halde

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

bulunur.

0^0 Belirsiz şekli

Örnek.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$$

$$y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x \quad 0^0$$

$$\ln y = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x \right] \quad \text{her iki tarafın ln i alınır}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(\sin x)^x] \quad \text{süreklilik}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(\sin x)] \quad 0 \cdot (-\infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{1/x} \quad -\infty/\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} \quad \text{L'Hôpital's}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} \quad 0/0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0 \quad \text{L'Hôpital's}$$

Böylece $\ln y = 0$, buradan da $y = e^0 = 1$ elde edilir. O halde

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 1$$

bulunur.

∞^0 Belirsiz şekli

Örnek.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \rightarrow \infty^0$$

$$y = (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{\ln x} \ln(\cot x)$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln x} \ln(\cot x) \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = -1$$

olup, $\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1}$ bulunur.