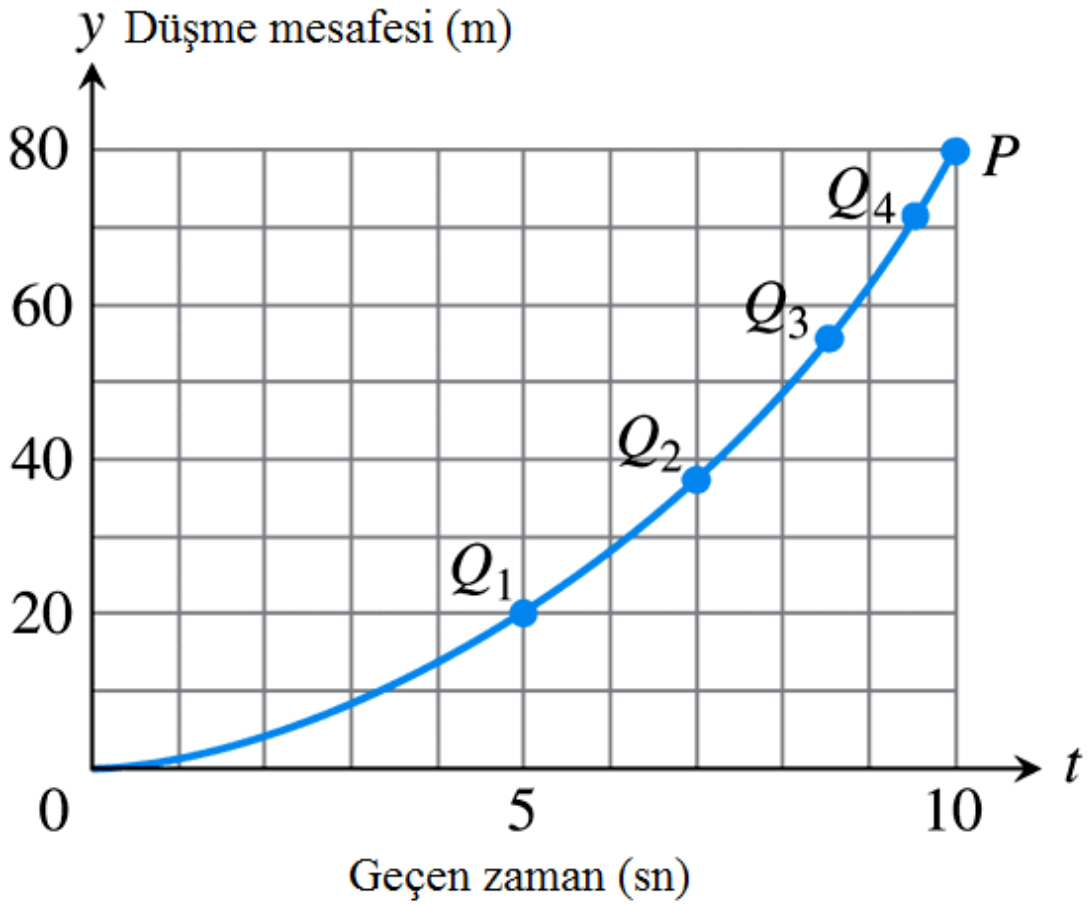


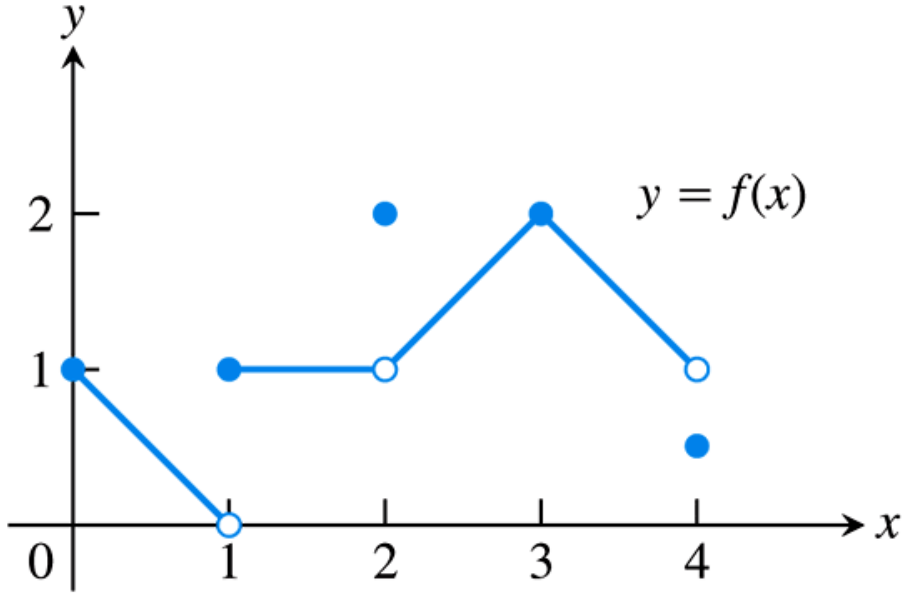
SÜREKLİLİK

Elimizdeki kalemi kaldırmadan sürekli bir hareketle tanım kümesi üzerinde çizilebilen bir $y = f(x)$ fonksiyonu, bir sürekli fonksiyon örneğidir.



Serbest düşen bir cismin deneysel $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ veri noktalarının kesiksiz bir eğri ile birleştirilmesi

Bir Noktada Süreklilik



$x = 1, x = 2$, ve $x = 4$ noktaları dışında
 $[0, 4]$ aralığında sürekli olan bir fonksiyon

Bu noktalarda grafikte kırıklıklar vardır. Fonksiyonun tanım kümesinin her noktasında f değeri ile f nin limit arasındaki ilişkiye bakalım:

Şekildeki fonksiyonun sürekli olduğu noktalar:

$$x = 0 \quad \text{noktasında} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$x = 3 \quad \text{noktasında} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$0 < c < 4, c \neq 1, 2 \quad \text{ise} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

Fonksiyonun süreksiz olduğu noktalar:

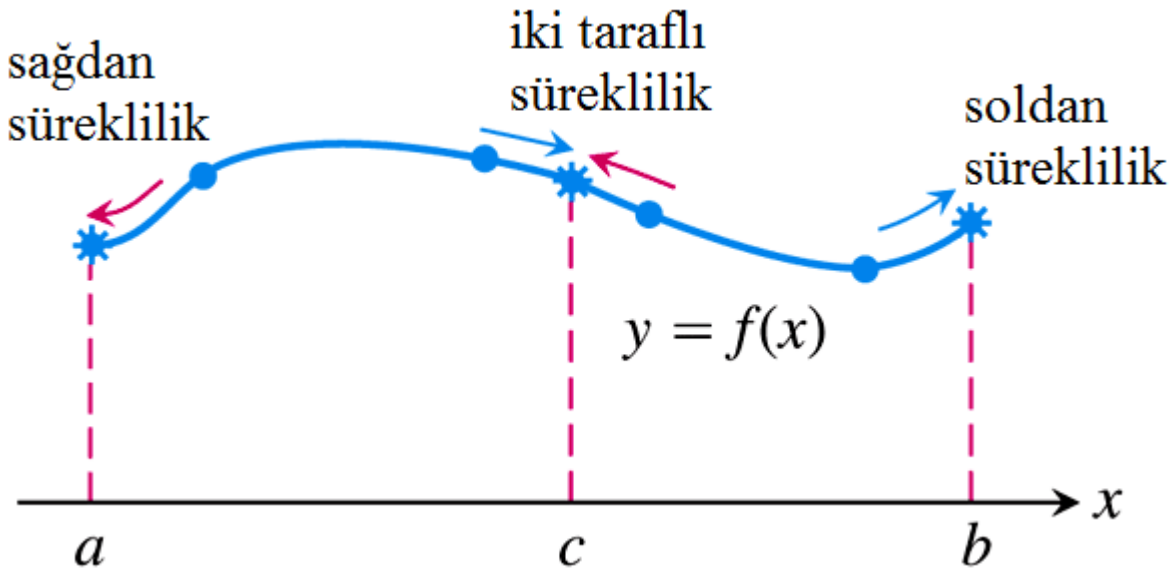
$x = 1$ noktasında $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ limiti yoktur.

$x = 2$ ise $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ fakat $1 \neq f(2)$

$x = 4$ ise $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1$ fakat $1 \neq f(4)$

$c < 0$ ve $c > 4$ ise bu noktalar f nin tanım kümesinde değildir.

Bir fonksiyonun tanım kümesindeki bir noktada sürekliliğini tanımlamak için bir iç noktadaki sürekliliği (iki taraflı limiti içeren) ve bir uç noktadaki (tek taraflı limit içeren) sürekliliği tanımlamamız gerekir.



a, b ve c noktalarında süreklilik

Tanım.

İç nokta: $y = f(x)$ fonksiyonu tanım kümesinin bir iç noktası olan c noktasında

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

eşitliğine sahipse, c noktasında süreklidir.

Uç nokta: Eğer

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

ise fonksiyon sol uç noktası a da süreklidir,

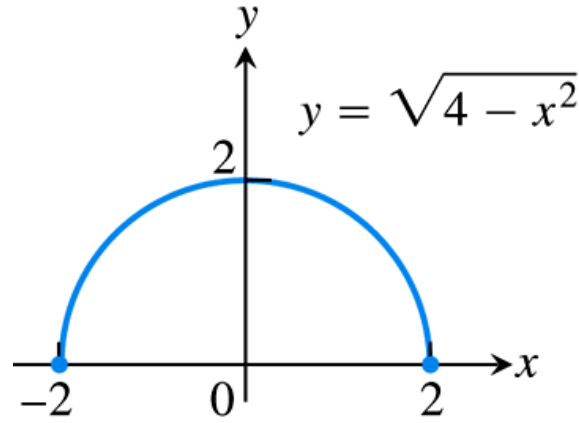
$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

ise fonksiyon sağ uç noktası b de süreklidir.

Eğer f fonksiyonu için $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ ise fonksiyon tanım aralığının c noktasında sağdan süreklidir. Eğer $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ ise fonksiyon tanım aralığının c noktasında soldan süreklidir. Bu durumda bir fonksiyon a noktasında sağdan süreklilyse tanım kümesinin sol uç noktası a da sürekli, b noktasında soldan süreklilyse tanım kümesinin sağ uç noktası b de süreklidir.

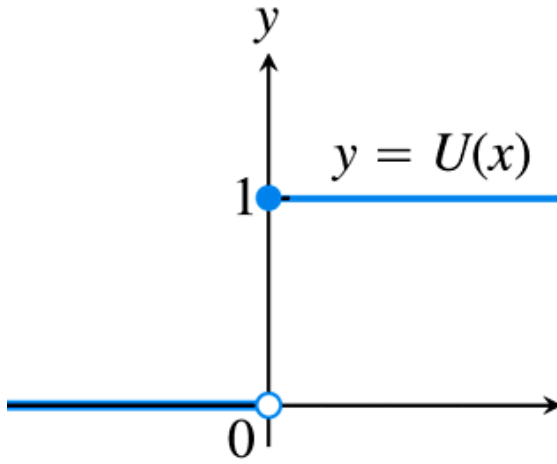
Bir fonksiyonun tanım aralığının bir c iç noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul fonksiyonun c noktasında sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.

1. Örnek.



Tanım kümesinin her noktasında sürekli olan bir fonksiyon

2. Örnek.



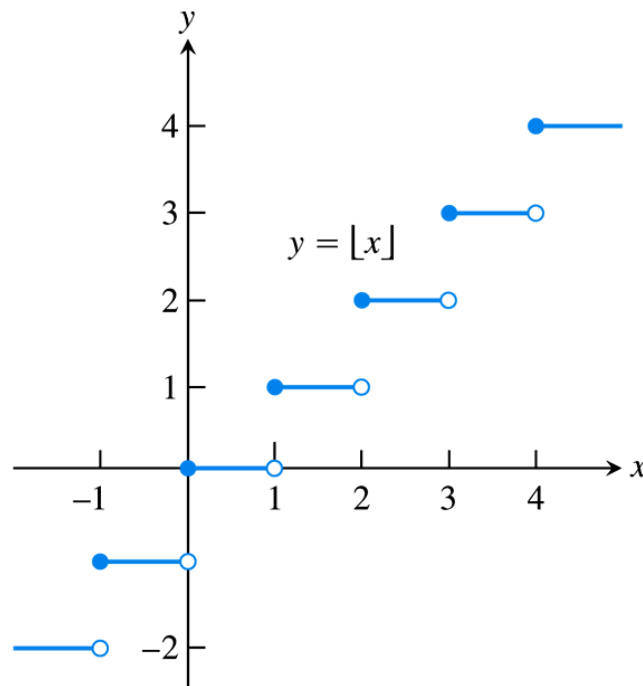
$U(x)$ basamak fonksiyonu $x=0$ noktasında sağdan sürekli, ancak soldan sürekli değildir. Dolayısıyla sürekli değildir. $x=0$ noktasında sıçrama süreksizliği vardır.

Süreklilik testi:

Bir f fonksiyonu aşağıdaki 3 koşulu sağlıyorsa $x=c$ noktasında süreklidir:

1. $f(c)$ vardır
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ vardır
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

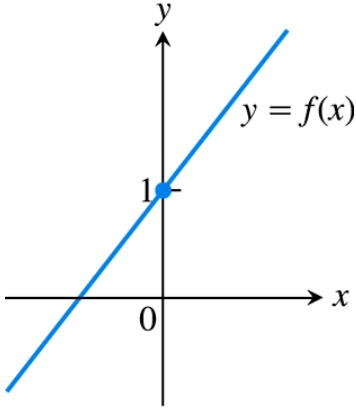
3. Örnek.



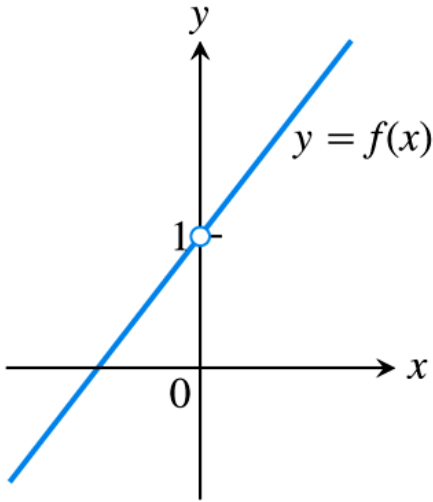
Tam değer fonksiyonu tamsayı olmayan her noktada süreklidir.

Her tamsayı değeri için soldan sürekli değil, sağdan süreklidir.

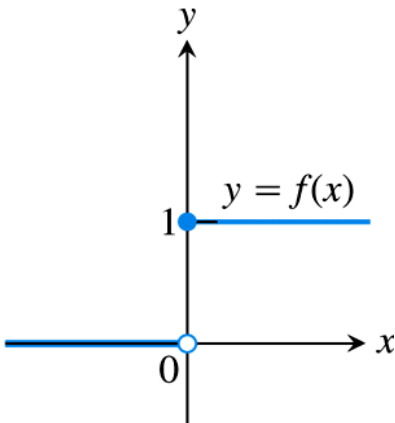
4. Örnek.



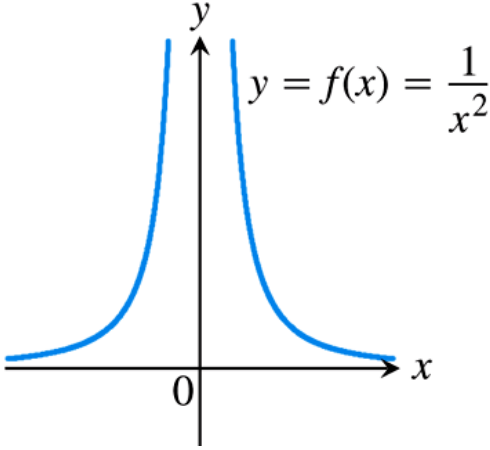
Şekildeki fonksiyon $x=0$ noktasında süreklidir.



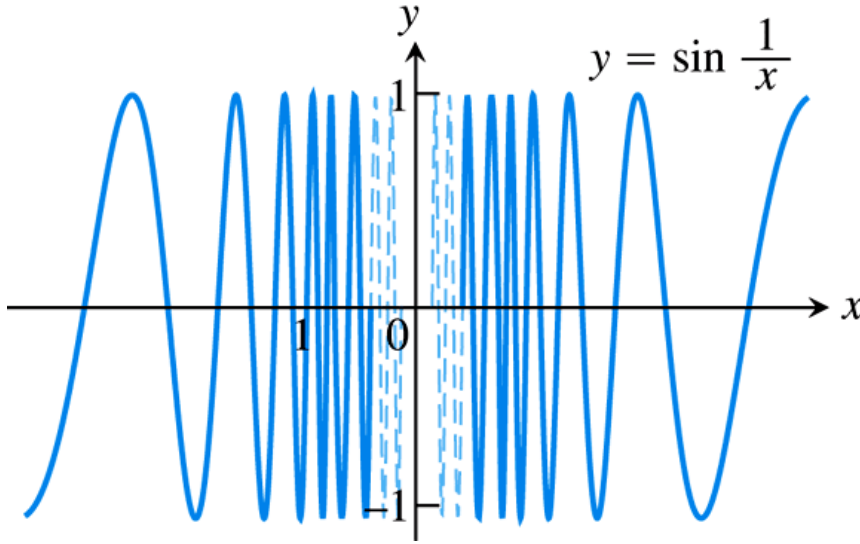
Şekildeki fonksiyon $f(0)=1$ olsa sürekli olurdu. Bu süreksizlik kaldırılabilir niteliktedir. Fonksiyon $x, 0$ noktasına yaklaşırken bir limite sahiptir ve $f(0)$ değerini limit değerine eşitleyerek süreksizliği kaldırabiliriz.



$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ limiti yoktur ve f yi 0 noktasında değiştirerek durumu düzeltmenin bir yolu yoktur. Bu tip süreksizlik sıçrama süreksizliği olarak adlandırılır. Bu tip süreksizlikte tek taraflı limitler vardır fakat değerleri farklıdır.



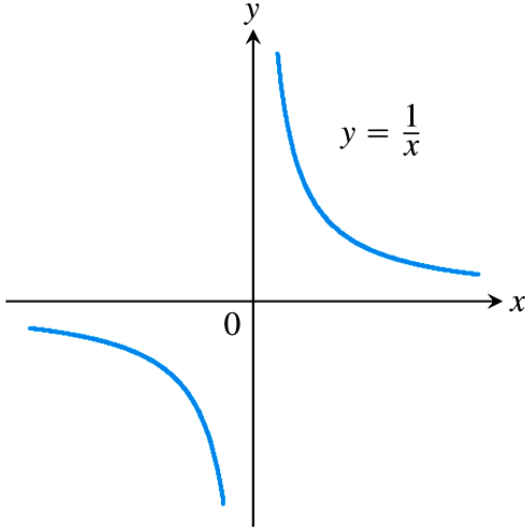
Şekildeki fonksiyon sonsuz süreksizliğine sahiptir.



Bu fonksiyon ise salınan süreksizliğe sahiptir. Fonksiyon çok fazla salınmaktadır ve x, sıfıra yaklaşırken limiti yoktur.

NOT: Bir fonksiyonun bir aralıkta sürekli olması için gerek ve yeter şart aralığın her noktasında sürekli olmasıdır. 1. Örnekteki çember fonksiyonu tanım kümesi olan $[-2,2]$ aralığında sürekli dir. Sürekli fonksiyon, tanım kümesinin her noktasında sürekli olan fonksiyon demektir. Bir sürekli fonksiyon her aralıkta sürekli olmak zorunda değildir.

5. Örnek.



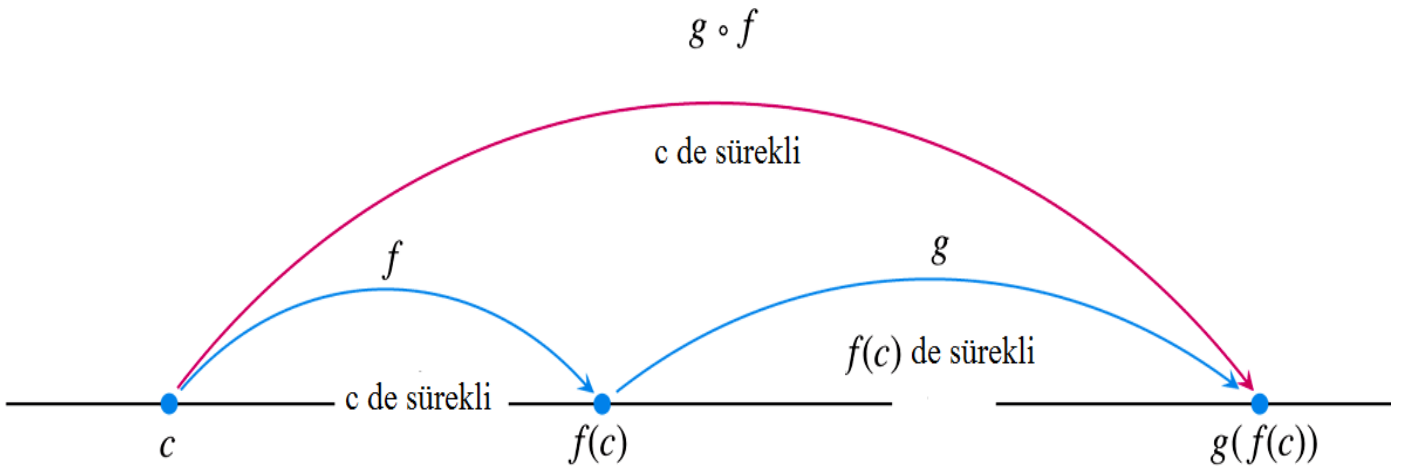
Şekildeki fonksiyon $x=0$ noktası hariç her noktada sürekli bir fonksiyondur.

Teorem. Eğer f ve g fonksiyonları $x=c$ noktasında sürekli ise, bu takdirde

$f + g$, $f - g$, $k \cdot f$, $f \cdot g$,
 $g(c) \neq 0$ olmak üzere f/g fonksiyonları da

sürekli.

Ayrıca



sürekli fonksiyonların bileşkesi de sürekli.

Örnek. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\sin x + 2}$ fonksiyonunun sürekli olup olmadığını bulunuz.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $\sin x + 2 \neq 0$ olduğundan f fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve sürekli dir.

Örnek. $f(x) = \frac{\sin x}{2 \cos x - 1}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları ve sürekli olduğu kümeyi bulunuz.

$$2 \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ veya } x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olup, fonksiyon x_1, x_2 noktalarında süreksizdir. Buna göre fonksiyonun sürekli olduğu küme

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ x \mid x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ veya } x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}$$

kümesidir.

Örnek.

$$f(x) = \begin{cases} -3x + 2, & x < 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{x-2}, & 1 \leq x < 3 \text{ ise} \\ 2x + 5, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{fonksiyonunun süreksiz olduğu}$$

noktaları bulunuz.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-3x + 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-2} \right) = -1$$

$$f(1) = -1$$

olduğundan fonksiyon $x = 1$ noktasında süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 5) = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{1}{x-2} \right) = 1$$

ve $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ olduğundan $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ yoktur. Bu

nedenle fonksiyon $x = 3$ noktasında süreksizdir. Yine

$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ olduğundan bu noktada sıçrama

süreksizliği vardır. Sıçrama değeri ise

$$J = \left| \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \right| = 10$$

olur.

Yine $1 \leq x < 3$ ise $f(x) = \frac{1}{x-2}$ olduğundan, $x = 2$

noktasında fonksiyon tanımsızdır. O halde fonksiyon $x = 2$ noktasında süreksizdir. Bu noktadaki süreksizlik çeşidi sonsuz süreksizliğidir.

Örnek.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a + \operatorname{sgn}(x-1), & x < 1 \text{ ise} \\ \llbracket x+b \rrbracket, & x = 1 \text{ ise} \\ |x^2 - 1|, & x > 1 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{fonksiyonunun}$$

$x = 1$ noktasında sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

Fonksiyon $x = 1$ noktasında sürekli ise $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a + \operatorname{sgn}(x-1)) = a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} |x^2 - 1| = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0$$

olup, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ limiti varsa, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ olacağına göre $a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$ bulunur.

Ayrıca,

$$0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \llbracket 1+b \rrbracket$$

olmalıdır. Buradan,

$$0 \leq 1+b < 1 \Rightarrow -1 \leq b < 0$$

bulunur.

Örnek.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 1 \text{ ise} \\ 3, & x = 1 \text{ ise} \\ x^2 - 2x, & x > 1 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{fonksiyonunun } x=1$$

noktasında süreklilik durumunu araştırınız. Fonksiyon süreksiz ise süreksizlik çeşidini belirtiniz. Fonksiyon sürekli olacak şekilde tanımlanabilir mi?

Fonksiyon $x=1$ noktasında sürekli ise $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ olmalıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x) = -1$$

olduğundan $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ bulunur. Ancak

$$-1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1) = 3$$

olduğundan f fonksiyonunun $x=1$ noktasında kaldırılabilir süreksizliği vardır.

Eğer $x=1$ için $f(1)=-1$ alınırsa, f fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki süreksizliği kaldırılmış olur. Buna göre f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x < 1 \text{ ise} \\ -1, & x = 1 \text{ ise} \\ x^2 - 2x, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde düzenlenirse $x=1$ noktasındaki süreklidir.

Örnek.

$f: [-2,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x^2$ fonksiyonunun x-eksenini kesip kesmediğini araştırınız.

f fonksiyonu polinom olduğundan $[-2,1]$ aralığında süreklidir. Ayrıca

$$f(-2) = -4 < 0 \quad \text{ve} \quad f(1) = 2 > 0$$

olduğundan, Ara Değer teoreminden dolayı $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir $c \in [-2,1]$ noktası vardır. Fonksiyon bu c noktasında x-eksenini keser.

Örnek.

$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$, ($x \neq 2$) fonksiyonunun $x = 2$ noktasında sürekli bir genişlemeye sahip olduğunu gösteriniz ve bu genişlemeyi bulunuz.

Fonksiyon $x = 2$ noktasında tanımlı olmamasına rağmen,

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{5}{4}$$

limiti vardır. O halde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases} \quad \text{veya} \quad g(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

olarak tanımlanan g fonksiyonu f fonksiyonunun $x = 2$ noktasındaki bir genişlemesidir.