

LİMİT VE SÜREKLİLİK

Tanım: $\forall a \in \mathbb{R}$ ve $\delta > 0$ sayısı verilsin.

$$\begin{aligned} U_{\delta}(a) &= \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} \end{aligned}$$

kümesine a – *nın* δ *komşuluğu*, $a \in \mathbb{R}$ sayısına *komşuluğun merkezi*, δ sayısına ise *yarıçap* denir.

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) &= U_{\delta}(a) \setminus \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : a - \delta < x < a + \delta, x \neq a\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\} \end{aligned}$$

kümesine ise a – *nın delik* δ – *komşuluğu* denir.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{R}$ verilsin. $\forall \delta > 0$ sayısı için $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a)$ kümesi A – *nın* en az bir elemanını içeriyorsa p – *ye* A – *nın* bir *yığılma noktası* denir ve $p \in A'$ ile gösterilir.

Örnek: $U_{\frac{1}{10}}(-2), U_{\frac{1}{100}}\left(\frac{1}{3}\right)$ komşuluklarını bulalım. $A = (-1, 1] \cup \{2, 3\}$ için $A' = ?$

Tanım: $A \subset \mathbb{R}, p \in A'$ ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta : \delta(\varepsilon) > 0$ varsa $x \rightarrow p$ iken $f(x) \rightarrow L$ denir ve $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ ile gösterilir.

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 5 = -3$ olduğunu gösterelim.

$\lim_{x \rightarrow 1} 3x + 4 = 1$ olduğunu gösterelim.

Teorem: $A \subset \mathbb{R}; f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $p \in A'$ olsun. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow p} g(x) = M$ limitleri varsa

i. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lim_{x \rightarrow p} (\lambda f)(x) = \lambda.L$

ii. $\lim_{x \rightarrow p} (f \mp g)(x) = \lim_{x \rightarrow p} [f(x) \mp g(x)] = L \mp M$

iii. $\lim_{x \rightarrow p} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow p} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

iv. $\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0)$

v. $f(x)$ bir polinom tipli fonksiyon ise $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

vi. $f(x), g(x)$ iki polinom tipli fonksiyon ve $g(p) \neq 0$ ise, $\lim_{x \rightarrow p} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{f(p)}{g(p)}$

.

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 5) = ? \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 4}{3x - 2} = ?$

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$ ve $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x > M = M_\varepsilon$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $x \rightarrow +\infty$ iken $f(x) \rightarrow L$ denir ve $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ yazılır.

Benzer şekilde, $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall x < M = M_\varepsilon$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists M_\varepsilon \in \mathbb{R}$ sayısı varsa $x \rightarrow -\infty$ iken $f(x) \rightarrow L$ denir ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ yazılır.

Örnek: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğunu gösterelim.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$ olduğunu gösterelim.

Tanım: $A \subset \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $p \in A'$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $f(x) > \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta: \delta(\varepsilon) > 0$ varsa $x \rightarrow p$ iken $f(x) \rightarrow +\infty$ yazılır.

Benzer şekilde, $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $f(x) < -\varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta: \delta(\varepsilon) > 0$ varsa $x \rightarrow p$ iken $f(x) \rightarrow -\infty$ yazılır ve sırasıyla

$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = +\infty$ ve $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty$

şeklinde ifade edilir.

Teorem (Sıkıştırma): $A \subset \mathbb{R}, f, g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $p \in A'$ olsun. $\forall x \in A$ için $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow p} h(x)$ ise $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$ dir.

Belirsizlikler

$\widetilde{\mathbb{R}}$ -da çalışırken limitte karşımıza çıkan $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ ve $\infty - \infty$ belirsizliklerini gidermek için eşlenikle çarpma, ortak çarpan parantezine alma, payda eşitleme, çarpanlarına ayırıp sadeleştirme yöntemleri gibi yöntemler seçilir.

Örnek: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 4}{-2x - 3}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 7}{3x^2 + 2x - 3}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 6}{4x^2 - 2x - 1}$ limitlerini bulalım.

$$\text{Not: } \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & n < m \\ \frac{a_n}{b_n}, & n = m \\ \text{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot \infty, & n > m \end{cases} \text{ olur.}$$

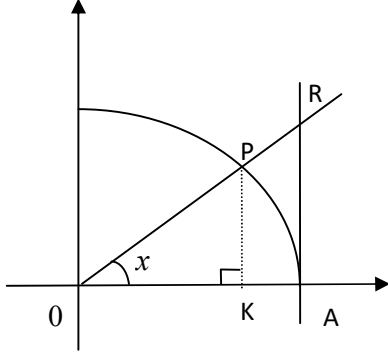
Örnek: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} - x = ?$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 5} - x = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 + 3} = ?$$

Örnek: $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu gösterelim. $\delta = \frac{\pi}{2}$ olmak üzere, $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

komşuluğunu alalım. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için



$$A\left(\overset{\triangle}{POK}\right) < A\left(\overset{\triangle}{APO}\right) < A\left(\overset{\triangle}{ROA}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x \cdot 1}{2} \Rightarrow$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

bulunur. $x \rightarrow 0$ iken limit alınırsa $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ olur. $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \Rightarrow x = -u$ alalım. O

zaman $0 < u < \frac{\pi}{2}$ olup

$$\frac{1}{\cos u} > \frac{\sin u}{u} > \cos u \Rightarrow \frac{1}{\cos x} > \frac{-\sin x}{-x} > \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$$

olur. Yani $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ dir.

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ limitlerini bulunuz.

Sağ ve Sol Limitler

$A \subset \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $p \in A'$ için f fonksiyonu $(p-\delta, p)$ ve $(p, p+\delta)$ komşuluklarında tanımlı olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ için $p - \delta_1 < x < p$ olduğunda $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta_1 : \delta_1(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa L_1 sayısına f - **nin** p **noktasındaki sol limiti** denir ve $f(p^-) = L_1$ veya $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = L_1$ şeklinde gösterilir.

$\forall \varepsilon > 0$ için $p < x < p + \delta_2$ olduğunda $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta_2 : \delta_2(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa L_2 sayısına f - **nin** p **noktasındaki sağ limiti** denir ve $f(p^+) = L_2$ veya $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = L_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem: $A \subset \mathbb{R}, f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ve $p \in A'$ olsun. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow f(p^+) = L, f(p^-) = L$ dir.

UYARI: Fonksiyonun tanımsızlık noktasında limit alınıyorsa veya mutlak değer, sign fonksiyonlarının içini sıfır yapan, tamdeğerin içini tamsayı yapan noktalarda limit alınıyorsa sağ ve sol limitlere bakılır.

Örnek: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{sgn}(x-2), \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|+|x+4|}{|x-2|+|x+1|}, \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \left\lfloor \frac{3}{2}x + 1 \right\rfloor, \lim_{x \rightarrow -1} 2^{\frac{x}{x+1}}$ limitlerini bulalım.

Asimtotlar

Bir fonksiyonun sonsuza uzanan bir kolu üzerindeki bir N noktasının bir doğruya ve ya bir eğriye olan uzaklığı N -nin sonsuza veya bir noktaya yaklaşması halinde 0 oluyorsa bu doğruya veya eğriye **asimtot** denir.

➤ $y = f(x)$ fonksiyonu için $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

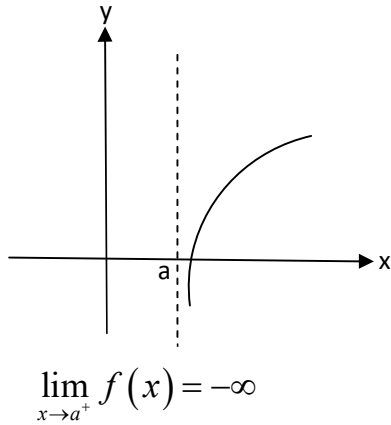
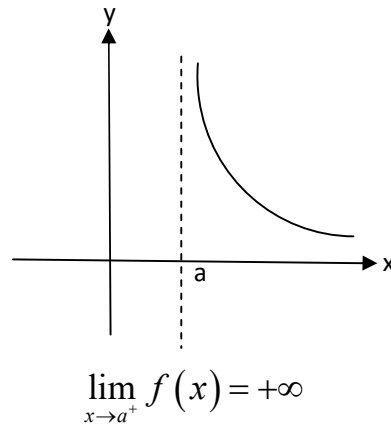
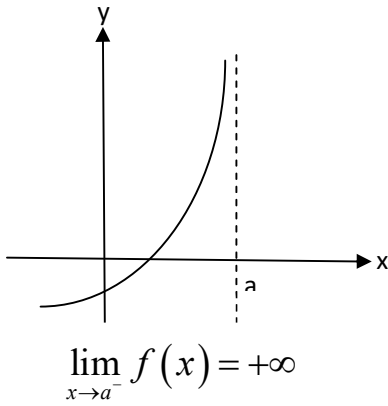
- i. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \mp\infty$ oluyorsa $x = a$ doğrusuna **sağdan düşey asimtot**
- ii. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \mp\infty$ oluyorsa $x = a$ doğrusuna **soldan düşey asimtot**

denir. Hem sağdan hem soldan düşey asimtota kısaca **düşey asimtot** denir.

UYARI:

Düşey asimtot Df –de olmayan sayılabilir ayrık tekil noktalarda aranır.

$Df = (a, b), (-\infty, a] \cup (b, +\infty), \dots$ gibi tanım kümeleri varsa sağdan ve soldan düşey asimtotlara dahil olmayan noktalarda bulunur.



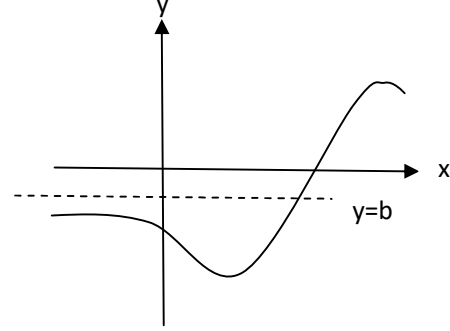
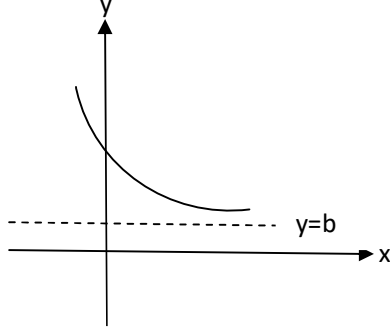
Örnek: $f(x) = \frac{x^2 - x + 7}{x^2 - 3x + 2}$, $g(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ düşey asimtot var mıdır? $h(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

düşey asimtot var mıdır?

➤ $y = f(x)$ fonksiyonu için Df izin verdiği takdirde

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ oluyorsa $y = b$ doğrusuna $+\infty$ **kolda yatay asimtot**
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ oluyorsa $y = b$ doğrusuna $-\infty$ **kolda yatay asimtot**

denir.



Df tanım kümesinde $x \rightarrow \mp\infty$ limitlerine izin verilmiyorsa yatay asimtota bakılamaz.

➤ $y = f(x)$ fonksiyonu için Df izin vermesine rağmen

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \mp\infty$ ise $+\infty$ kolda yatay asimtot yoktur. Eğri asimtot vardır.
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \mp\infty$ ise $-\infty$ kolda yatay asimtot yoktur. Eğri asimtot vardır.

Bir $\varphi_1(x)$ fonksiyonu için

- i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x) - \varphi_1(x)\} = 0$ oluyorsa $\varphi_1(x)$ fonksiyonuna $+\infty$ **kolda eğri asimtot** denir.
- ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - \varphi_2(x)\} = 0$ oluyorsa $\varphi_2(x)$ fonksiyonuna $-\infty$ **kolda eğri asimtot** denir.

φ_1 veya φ_2 fonksiyonları 1. dereceden lineer bir doğru denklemi ise bunlara **eğik asimtot** denir.

NOT: Eğri asimtotu bulmak kolay değildir. Ama bazı durumlarda bulunabilirler.

1) $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklinde ve $\deg(P) > \deg(Q)$ olsun. Polinom bölmesiyle

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)} \text{ olduğunda } y = B(x) \text{ eğrisi hem } +\infty \text{ hem de } -\infty$$

kolda eğri asimtot olur.

2) $y = f(x)$ fonksiyonu için $+\infty$ veya $-\infty$ kolda $y = m_1x + n_1$ ve $y = m_2x + n_2$ eğik asimtotları varsa

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ve } n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \{f(x) - m_1(x)\}$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ve } n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - m_2(x)\}$$

olur.

Örnek: $f(x) = \frac{x^3 + 7x + 12}{x + 2}$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ asimtotlarını ve

$h(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 3x - 9}$ asimtotunu bulalım.