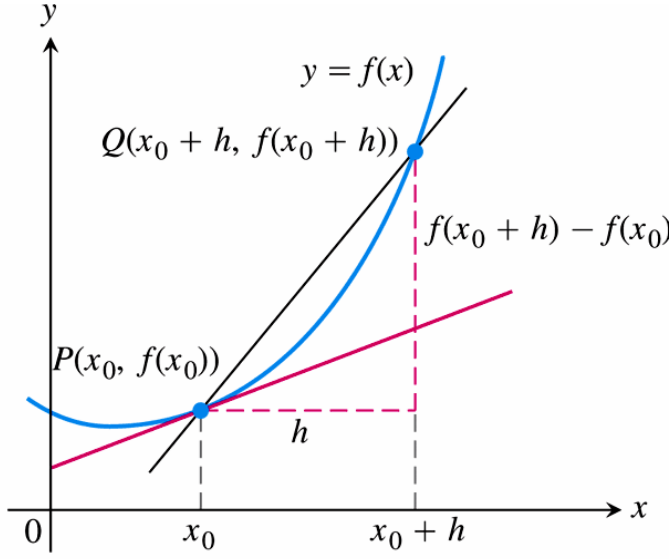


TÜREV

Bir Fonksiyonun Grafiğine Teğet Olan Denklemin Bulunması



$$\text{P noktasında teğet doğrusunun eğimi} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

TANIM : Bir $y = f(x)$ eğrisinin $P(x_0, f(x_0))$ noktasındaki eğimi

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{limitin var olması koşuluyla})$$

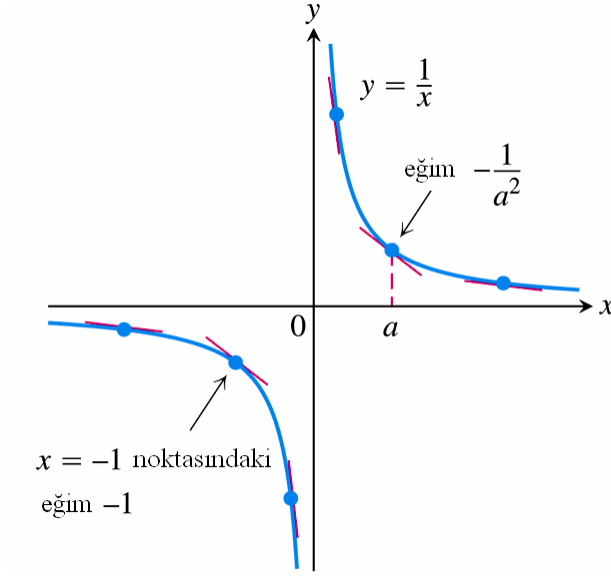
sayısıdır. Eğrinin P noktasındaki teğet doğrusu, P noktasından geçen ve eğimi m olan doğrudur.

Örnek. $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun $x = a \neq 0$ noktasındaki eğimini bulunuz. $x = -1$

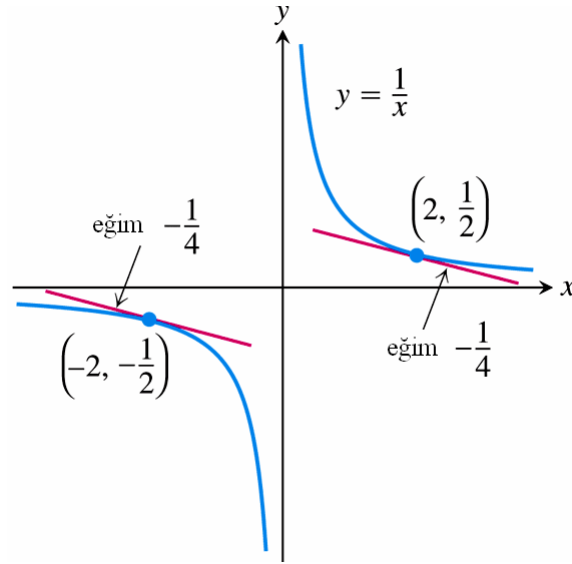
noktasındaki eğim nedir?

Çözüm. $y = \frac{1}{x}$ fonksiyonu verilmiştir. $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ noktasındaki eğim

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$$



Teğetin eğimi orijinin yakınında diktir, değme noktası uzaklaştıkça diklik azalır.



Eğimi $-\frac{1}{4}$ olan $y = \frac{1}{x}$ eğrisine teğet olan teğet doğruları

Bir Noktadaki Türev

$h \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

ifadesine f fonksiyonunun x_0 noktasında h artımına bağlı fark bölümü denir.

Tanım. f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi $f'(x)$ ile gösterilir ve limitin var olması koşuluyla

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1)$$

olarak tanımlanır.

(1) ifadesi,

- $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki grafiğinin eğimidir.
- $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki teğetinin eğimidir.
- $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasında x değişkenine bağlı değişim oranıdır.
- Bir noktadaki $f'(x_0)$ türevidir.

Bir Fonksiyon Olarak Türev

Önceki bölümde bir $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki türevi

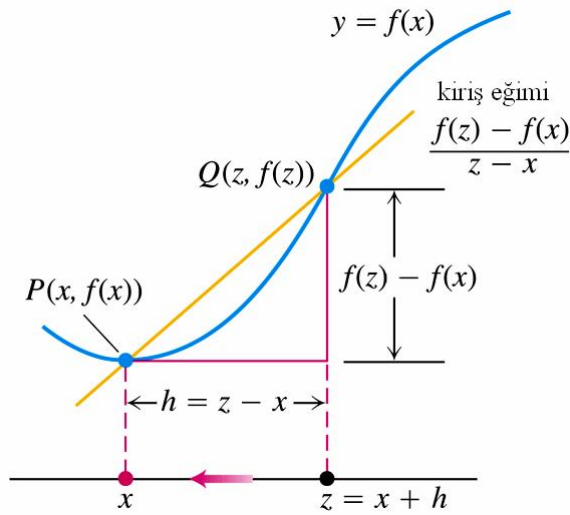
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

olarak tanımlanmıştı. Burada ise türev, f fonksiyonunun tanım aralığındaki her x değeri için f fonksiyonundan türetilen yeni bir fonksiyon olarak incelenecektir.

Tanım. x değişkenine bağlı $f(x)$ fonksiyonunun türevi, limitin var olması koşuluyla f' fonksiyonudur ve x noktasındaki değeri

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

olarak tanımlanır.



f fonksiyonunun x noktasındaki türevi

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

Tanımda kullanılan $f(x)$ notasyonu, tanımlanan $f'(x)$ türev fonksiyonunun bağımsız değişkeni olan x değişkenini vurgulamak içindir. $f'(x)$ türev fonksiyonunun tanım kümesi, f fonksiyonunun tanım kümesinde limiti olan noktaların kümesidir. Doğal olarak $f'(x)$ türev fonksiyonunun tanım kümesi f fonksiyonunun tanım kümesiyle aynıdır veya ondan küçüktür. Bir x noktasında f' türev fonksiyonunun var olması, f fonksiyonunun bu noktada türevi vardır ve fonksiyon bu noktada türevlenebilir anlamına gelir. Eğer f' türev fonksiyonu f fonksiyonunun tanım kümesinin her noktasında varsa, f fonksiyonu **türevlenebilir** denir.

Tanımdan Türevin Hesaplanması

Örnek. a. $x > 0$ için $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun türevini türev tanımını kullanarak bulunuz.

b. $f(x) = \sqrt{x}$ eğrisine $x = 4$ noktasında teğet olan doğruyu bulunuz.

Çözüm.

$$f'(x) = \lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{z - x} = \lim_{z \rightarrow x} \frac{\sqrt{z} - \sqrt{x}}{(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{z} + \sqrt{x})}$$

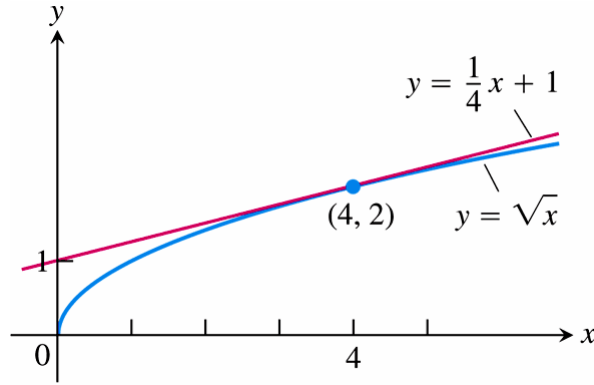
$$= \lim_{z \rightarrow x} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

bulunur. Böylece karekök fonksiyonunun türevi $x > 0$ için

$$\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

olur.

b.



$f(x) = \sqrt{x}$ eğrisi ve $(4, 2)$ noktasındaki teğeti

Teğetin eğimi, fonksiyonun türevinde $x = 4$ yazılarak bulunur. Böylece

$$m = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

olup, eğimi $\frac{1}{4}$ olan $(4, 2)$ noktasından geçen teğet doğrusunun denklemi,

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

olarak bulunur.

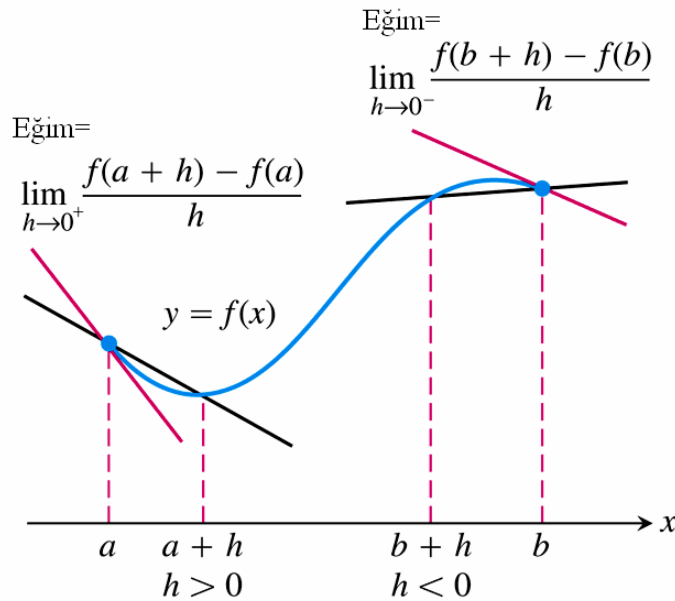
Bir Aralıkta Türev; Tek Taraflı Türevler

Bir $y = f(x)$ fonksiyonu aralığın (sonlu veya sonsuz) her noktasında bir türeve sahipse, buna *açık aralıkta türevlenebilen* fonksiyon denir. Eğer bir fonksiyon (a, b) açık aralığında türevlenebilirse ve

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad x = a \text{ noktasında sağ türev}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \quad x = b \text{ noktasında sol türev}$$

limitleri uç noktalarda varsa; bu fonksiyon $[a, b]$ *kapalı aralığında türevlenebilir* denir.



Uç noktalardaki limitler tek taraflı limitlerdir.

Sağ ve sol türevler fonksiyonun tanım kümesindeki herhangi bir nokta için benzer şekilde tanımlanabilir. Buna göre, bir fonksiyonun bir noktada türevlenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul o noktada sağ ve sol türevlerinin var olması ve bu tek taraflı türevlerin eşit olmasıdır.

Örnek. $y = |x|$ fonksiyonunun $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralıklarında türevlenebilir olduğunu, ancak $x = 0$ noktasında türevinin olmadığını gösterelim.

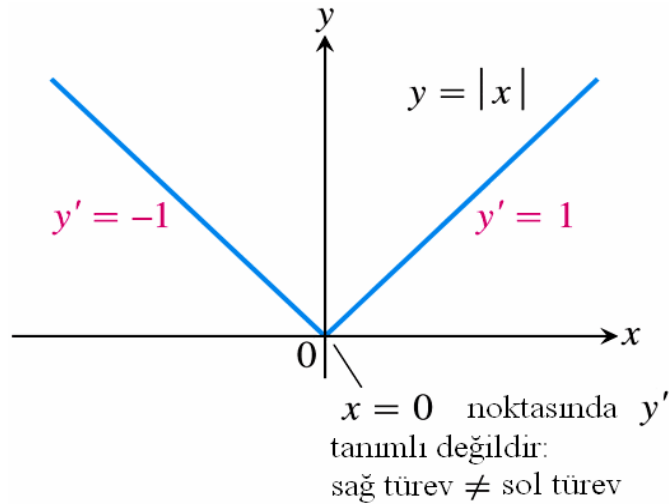
Çözüm. $y = mx + b$ fonksiyonunun türevinin m eğimi olduğunu biliyoruz. O halde orijinin sağına doğru

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(1 \cdot x) = 1, \quad \frac{d}{dx}(mx + b) = m, \quad |x| = x$$

ve soluna doğru

$$\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}(-1 \cdot x) = -1, \quad |x| = -x$$

olduğu bulunur.



Orijinde türev yoktur. Çünkü tek taraflı türevler bu noktada farklılaşmaktadır:

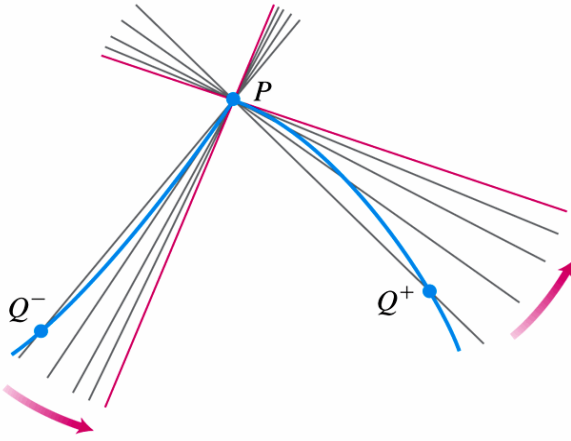
$$|x| \text{ in } 0 \text{ noktasındaki sağ türevi} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$|x| \text{ in } 0 \text{ noktasındaki sol türevi} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

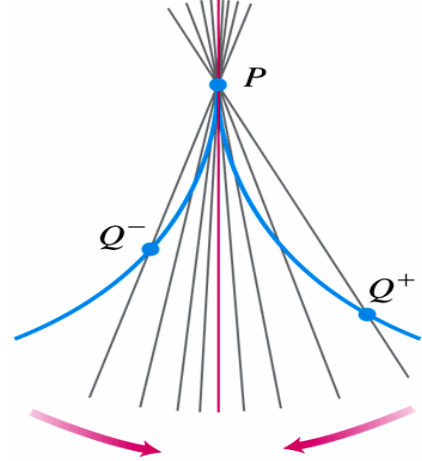
olur.

Bir Fonksiyonun Hangi Durumlarda Bir Noktada Türevi Yoktur?

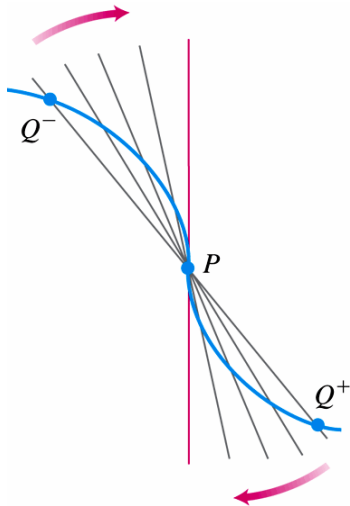
Grafikte $P(x_0, f(x_0))$ noktası ile bu noktaya yakın Q noktalarından geçen kiriş doğrularının eğimleri Q noktası P noktasına yaklaştıkça sonlu limite sahipse fonksiyonun x_0 noktasında türevi vardır. Q noktası P noktasına yaklaştıkça kirişlerin eğimleri limit durumunda bir değere yaklaşıyor ya da dikeyleşiyorsa bu noktada türev yoktur. Bir fonksiyonunun bir noktada türevinin olmaması bir çok nedene bağlı olabilir. Bunlardan bazıları aşağıdaki şekillerde verilmiştir:



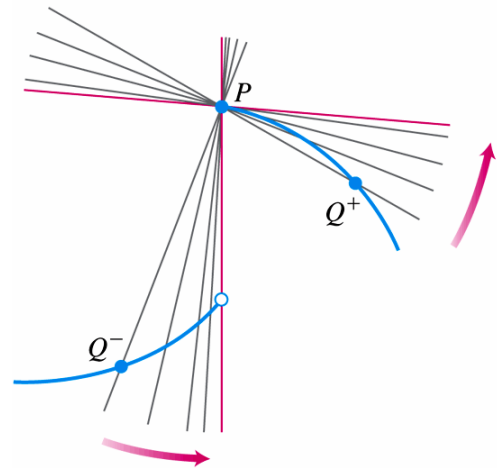
Köşe durumu, burada tek taraflı türevler farklılaşır.



İçten bükülme, burada PQ kirişinin eğimi bir taraftan ∞ a, diğer taraftan $-\infty$ a ıraksar.



Dikey teğet; burada PQ kirişinin eğimi her iki taraftan ∞ veya $-\infty$ a ıraksar.



Süreksizlik

Teorem. Eğer f fonksiyonunun $x=c$ noktasında bir türevi varsa, f fonksiyonu $x=c$ noktasında süreklidir.

Uyarı. Teoremin tersi genellikle doğru değildir. Son örnekte görüldüğü gibi bir fonksiyonun sürekli olduğu bir noktada türevi olmayabilir.

Örnek. $f(x)=|x-1|$ fonksiyonu $x=1$ noktasında sürekli midir? Türevli midir?

Çözüm.

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases} \text{ olup,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x+1) = 0 \quad \text{ve} \quad f(1) = |1-1| = 0$$

bulunur. O halde $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ olduğundan fonksiyon $x=1$ noktasında süreklidir.

Ancak

$$\begin{aligned} |x-1| \text{ in } 1 \text{ noktasındaki sağ türevi} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h-1|-|1-1|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x-1| \text{ in } 1 \text{ noktasındaki sol türevi} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h-1|-|1-1|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

olduğundan fonksiyon $x=1$ noktasında türevli değildir.

O halde $x=c$ noktasında sürekli bir fonksiyon bu noktada türevlenemeyebilir.

TÜREV KURALLARI

u ve v , x 'in türevlenebilen fonksiyonları olsun.

Sabit: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Toplam: $\frac{d}{dx}(u + v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$

Fark: $\frac{d}{dx}(u - v) = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$

Sabit ile Çarpım: $\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{du}{dx}$

Çarpım: $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

Bölüm: $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

Kuvvet: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

Zincir Kuralı: $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

İki ve Daha Yüksek Mertebeden Türevler

Eğer $y = f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir bir fonksiyon ise, türevi olan $f'(x)$ de bir fonksiyondur. Eğer f' fonksiyonu da türevlenebilirse, f' fonksiyonunun türevi alınarak f'' şeklinde

gösterilen yeni bir fonksiyon elde edilir. Yani $f'' = (f')'$ şeklindedir. f'' , $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi olarak adlandırılır. İkinci türev

$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2 f(x)$$

şekillerinden biriyle gösterilir.

Örnek. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ fonksiyonunun ilk dört türevi şöyledir:

Birinci türev : $y' = 3x^2 - 6x$

İkinci türev : $y'' = 6x - 6$

Üçüncü türev : $y''' = 6$

Dördüncü türev : $y^{(4)} = 0$

Değişim Oranı Olarak Türev

Anlık Değişim Oranı

$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ bölüm farkı f fonksiyonunun $(x, x+h)$ aralığındaki ortalama değişim oranı olarak tanımlanır.

Tanım. f fonksiyonunun x_0 noktasında x e göre **anlık değişim oranı** (değişim oranı)

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

türevidir.

O halde, anlık oranlar ortalama oranların limitleridir.

Örnek. Bir dairenin A alanı D çapı arasındaki bağıntı

$$A = \frac{\pi}{4} D^2$$

olarak veriliyor. Çap 10 m. olduğunda, alanın çapa göre değişimi ne orandadır?

Çözüm. Alanın çapa göre değişim oranı

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} \cdot 2D = \frac{\pi D}{2}$$

olup, çap $D = 10 \text{ m}$. olduğunda, alan çapa göre

$$\frac{\pi(10)}{2} = 5\pi \text{ m}^2/\text{m} \approx 15.71 \text{ m}^2/\text{m}$$

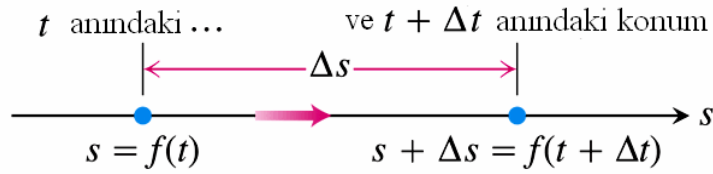
oranında değişir.

Bir Doğru Boyunca Hareket: Yerdeğiştirme, Hız, Sürat, İvme ve Tepki

Bir cismin bir koordinat doğrusu boyunca (bir s eksenini) genellikle yatay ya da dikey hareket ettiğini varsayalım. Böylece cismin s konumunu zamana bağlı t fonksiyonu olarak

$$s = f(t)$$

şeklinde yazarız.



Bir koordinat doğrusu boyunca hareket eden bir cismin t anındaki ve hemen biraz sonra $t + \Delta t$ anındaki konumları

Cismin t anından $t + \Delta t$ anına kadar olan zaman aralığında **yerdeğiştirmesi**

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

formülüyle verilir.

Cismin bu zaman aralığında **ortalama hızı** ise

$$v_{ort} = \frac{\text{yerdeğiştirme}}{\text{geçen zaman}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

şeklindedir.

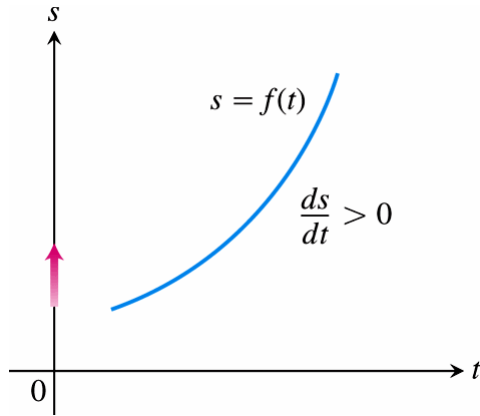
Cismin tam t anındaki hızını bulmak için Δt sıfıra yaklaşırken t anından $t + \Delta t$ anına kadar geçen zaman aralığında ortalama hızın limitini alırız. Bu limit f fonksiyonunun t ye göre türevidir.

Tanım. Hız (anlık hız), konumun zamana göre türevidir. Buna göre, eğer bir cismin t zamanındaki konumu $s = f(t)$ ise, cismin t zamanındaki hızı

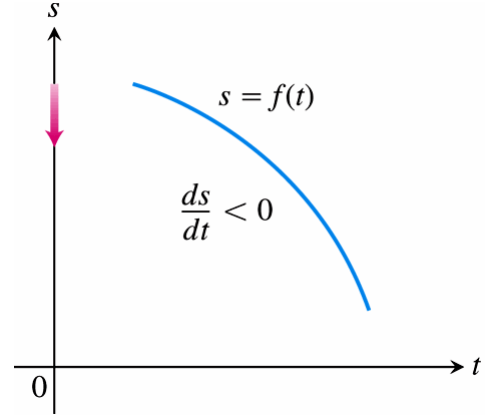
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

limitinin değeridir.

Hız, yukarıdaki şekilde cismin yatay bir doğru boyunca ne kadar hızlı hareket ettiğini söylemekten başka, hareketin yönünü de belirtir. Bir cisim ileriye doğru hareket ederken (s artıyor) hız pozitif, cisim geriye doğru hareket ederken (s azalıyor) hız negatiftir. Eğer koordinat doğrusu dikey ise cisim yukarı hareket ettiğinde hız pozitif, aşağıya doğru hareket ettiğinde hız negatiftir.



s artan: pozitif eğim
Yukarıya hareket



s azalan: negatif eğim
aşağıya hareket

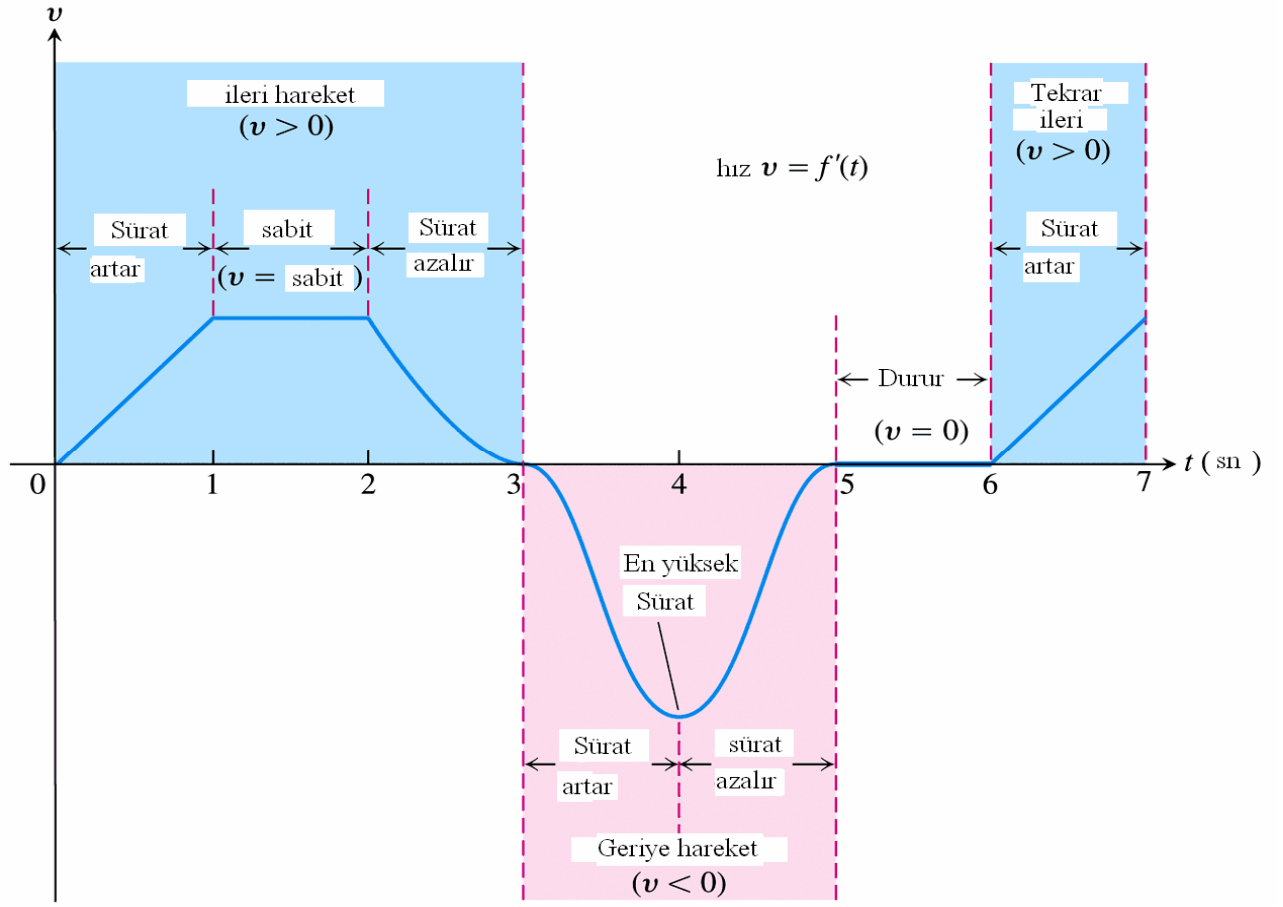
Mavi eğriler cismin zamana göre konumunu göstermektedir.

Tanım. Sürat, hızın mutlak değeridir.

$$Sürat = |v(t)| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

Sürat, hareketin yönünü dikkate almayan bir değişim ölçüsüdür.

Örnek.



Şekil yatay bir doğru boyunca hareket eden bir parçacığın hız grafiğini göstermektedir. Hız fonksiyonunun grafiğinde parçacık hareketinin ileri ya da geriye doğru olduğunu (şekilde verilmemiştir) eğim değil, hız fonksiyonunun işareti belirler. Şekle bakıldığında, parçacık ilk 3 saniyede ileriye doğru (hız pozitif olduğunda), sonraki 2 saniyede geriye doğru (hız negatif) hareket etmekte, sonraki 1 saniye boyunca hareketsiz kalmakta ve sonra tekrar ileriye doğru hareket etmektedir. Hızın sıfır olduğu $t = 3$ anında parçacık durur ve hız negatif olmaya başladığında yönünü değiştirir. Parçacık geriye doğru hareket ederken sürati 4. saniyeye kadar artar. Bu, geriye doğru hareket ederken ulaştığı en büyük sürattir. Geriye doğru hareketine devam eden parçacık $t = 4$ anından $t = 5$ anına kadar yavaşlar ve duru (burada hız yine sıfırdır). Parçacık tam bir saniye hareketsiz kaldıktan sonra 6. saniyede süratlenerek ileriye doğru hareket eder.

- Bir cismin hızının değişim oranına cismin **ivmesi** denir. İvme cismin ne hızla kalktığını veya kaybolan süratini ölçer.

İvmedeki ani bir değişikliğe **tepki** veya **sarsıntı** denir. Giden bir araba ya da otobüsün içinde sarsıldığınızda, bu durum mutlaka ivmenin çok büyük olduğu anlamına gelmez, rahatsız eden şey ivmedeki ani değişimdir.

Tanım. İvme, hızın zamana göre türevidir. Bir cismin t anındaki konumu $s = f(t)$ ise,

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

cismin t anındaki ivmesidir.

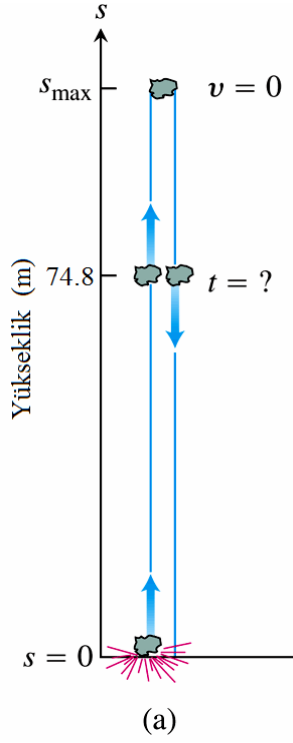
Tepki ise ivmenin zamana göre türevidir:

$$j(t) = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

Örnek. Yer yüzeyindeki bir dinamit patlamasında ağır bir taş parçası koparılarak yukarı doğru $50 \frac{m}{sn}$ başlangıç hızıyla fırlatılmıştır (Şekil a.). t saniye sonra $s = 49t - 4.9t^2 \text{ m}$. yüksekliğine ulaşır.

- a. Taş ne kadar yükseğe çıkar?
- b. Yukarı doğru tırmanırken ve yerden yüksekliği 78.4 m iken taşın hızını ve süratini bulunuz. Aşağıya doğru inerken aynı yükseklikte ilgili değerleri bulunuz.
- c. Herhangi bir t anında (patlamadan sonra) uçuş sırasında taşın ivmesi nedir?
- d. Taşın tekrar yere çarpma zamanını bulunuz.

Çözüm. a. Seçilen koordinat sisteminde s , aşağıdan yukarı doğru alınan yolu ölçtüğünden yukarı doğru hızın işareti pozitif, aşağıya doğru ise negatiftir. Taşın ulaştığı en büyük yükseklik, hızın sıfıra eşit olduğu andır.



Bu yüksekliği bulmak için $v = 0$ denkleminde zamanı bulup bu zamana karşılık gelen s değerini hesaplamak gerekir.

Taşın hareket sırasında herhangi bir t anındaki hızı,

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(49t - 4.9t^2) = 49 - 9.8t \quad m/sn$$

olup,

$$v = 49 - 9.8t = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 5 \text{ sn}$$

bulunur. Yani $t = 5$. Saniyede hız sıfırdır. $t = 5$ sn anında taşın yerden yüksekliği

$$s_{maks} = s(5) = 49(5) - 4.9(5)^2 = 245 - 122.5 = 122.5 \text{ m.}$$

bulunur (Şekil b).

b. Taşın yukarı ve aşağıya doğru yerden uzaklığının 78.4 m olduğu anı bulmak için, önce

$$s(t) = 49t - 4.9t^2 = 78.4$$

denklemini sağlayan t değerleri bulunmalıdır. Bu denklem özölürse

$$4.9t^2 - 49t + 78.4 = 0$$

$$4.9(t^2 - 10t + 16) = 0$$

$$(t - 2)(t - 8) = 0$$

$$t = 2 \text{ sn} , \quad t = 8 \text{ sn}$$

bulunur. Böylece taş, patlamadan 2 sn sonra yukarı yönde yerden 78.4 m yüksektedir ve patlamadan 8 sn sonra aşağı yönde yine 78.4 m yüksektedir. Bu iki anda taşın hızları

$$v(2) = 49 - 9.8(2) = 29.4 \text{ m/sn}$$

$$v(8) = 49 - 9.8(8) = -29.4 \text{ m/sn}$$

Her iki anda da taşın hızı 29.4 m/sn dir. $v(2) > 0$ olduğundan $t = 2$ anında taş yukarı doğru hareket etmektedir (s artmaktadır); ancak $v(8) < 0$ olduğundan $t = 8$ anında taş aşağıya doğru hareket etmektedir.

c. Patlamadan sonraki her anda taşın ivmelenmesi sabittir:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(49 - 9.8t) = -9.8 \text{ m/sn}^2 .$$

İvmelenme daima aşağıya doğrudur. Taş yukarı doğru giderken ivme yavaşlar, aşağıya doğru düşüşe geçtiğinde hızlanır.

d. $s = 0$ olduğu pozitif t zamanında taş yeryüzüne çarpar. $49t - 4.9t^2 = 0$ denklemi özölürse, $t = 0$ ve $t = 10$ bulunur. $t = 0$ anında patlama meydana geldiğinden ve başlangıç noktası olduğundan, $t = 10$ anında taş yere düşmüştür.

Trigonometrik Fonksiyonların Türevi

Sinüs Fonksiyonunun Türevi

Eğer $f(x) = \sin x$ ise, bu durumda

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$$

olup,

$$(\sin x)' = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

yazılır.

Örnekler:

1. $y = x^2 - \sin x$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2 - \sin x)}{dx} = \frac{d(x^2)}{dx} - \frac{d(\sin x)}{dx} = 2x - \cos x$$

2. $y = x^2 \sin x$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^2 \sin x)}{dx} = x^2 \frac{d(\sin x)}{dx} + \sin x \frac{d(x^2)}{dx} = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

3. $y = \frac{\sin x}{x}$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{dx} = \frac{x \cdot \frac{d(\sin x)}{dx} - \sin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

Kosinüs Fonksiyonunun Türevi

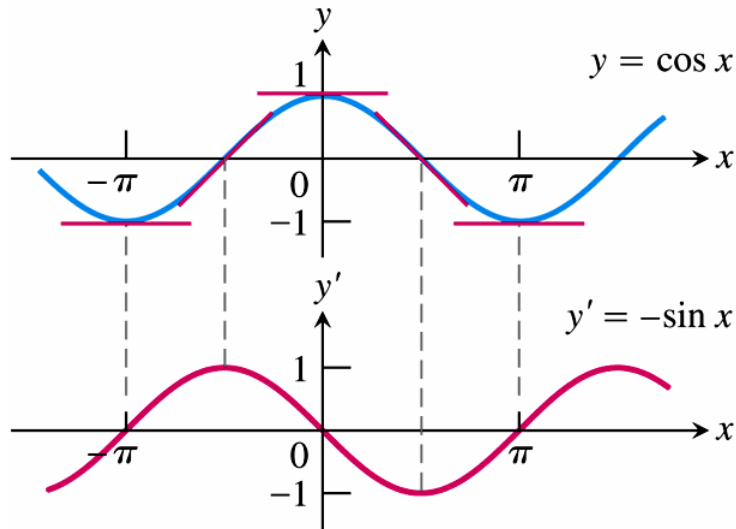
Eğer $f(x) = \cos x$ ise, bu durumda

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x$$

olup,

$$(\cos x)' = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

yazılır.



$y = \cos x$ eğrisinin teğetlerinin eğimleri olarak $y' = -\sin x$ eğrisi

Örnekler:

1. $y = \sin x \cos x$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(\sin x \cos x)}{dx} = \sin x \frac{d(\cos x)}{dx} + \cos x \frac{d(\sin x)}{dx} \\ &= \sin x (-\sin x) + \cos x (\cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

2. $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

Diğer Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

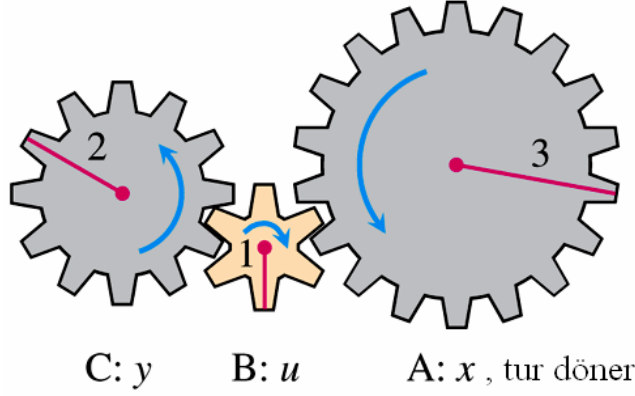
Örnek. $\frac{d(\tan x)}{dx}$ türevini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}\frac{d(\tan x)}{dx} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x\end{aligned}$$

Zincir Kuralı

Bir Bileşke Fonksiyonun Türevi



A çarkı x tur attığında, B çarkı u tur ve C çarkı y tur atar. Çarkların çevre ya da dişlilerin sayısı karşılaştırıldığında

$y = \frac{u}{2}$, C çarkı B çarkının yarısı kadar döner,

$u = 3x$, B çarkı A çarkının 3 katı kadar döner, dolayısıyla $y = \frac{3x}{2}$

olur. Bu fonksiyon $y = \frac{u}{2}$ ve $u = 3x$ fonksiyonlarının bileşkesidir. O halde

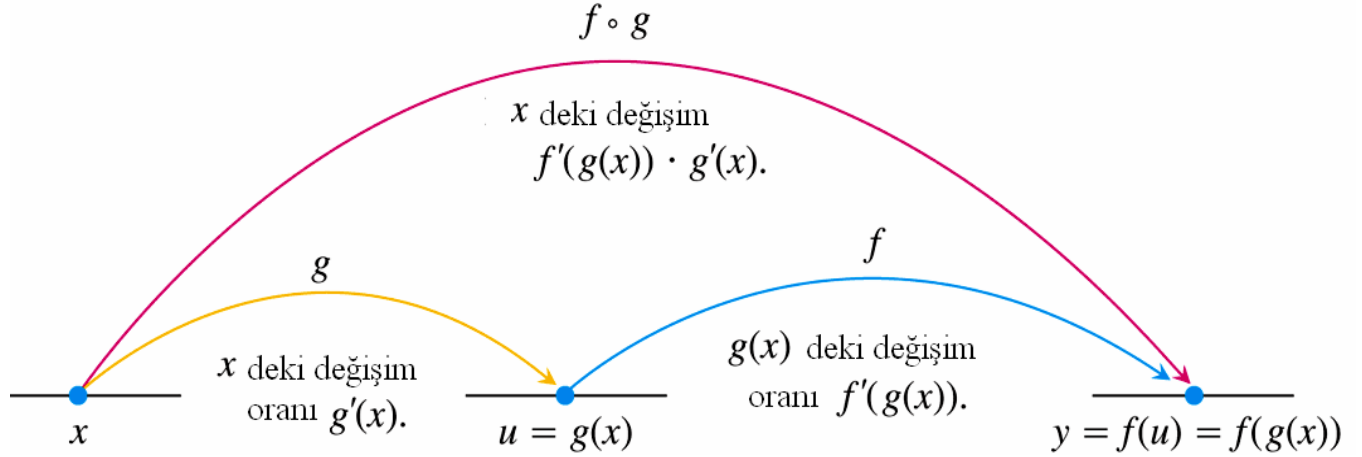
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)(3) = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad \text{olur.}$$

Örnek. $y = (3x^2 + 1)^2$ fonksiyonunun türevini bulalım. Bu fonksiyon $y = f(u) = u^2$ ve $u = g(x) = 3x^2 + 1$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Böylece

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot 6x = 2(3x^2 + 1) \cdot 6x = 36x^3 + 12x$$

bulunur.

* $f(g(x))$ bileşke fonksiyonunun x noktasındaki türevi, f fonksiyonunun $g(x)$ deki türevi ile g fonksiyonunun x e göre türevinin çarpımına eşittir. Bu kurala zincir kuralı denir.



Teorem (Zincir Kuralı) Eğer $f(u)$, $u = g(x)$ noktasında ve $g(x)$ de x noktasında türevlenebilirse, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ bileşke fonksiyonu x noktasında türevlenebilirdir. O halde bileşke fonksiyonun türevi

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

olur. Eğer $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

olur. Burada $\frac{dy}{du}$ nun $u = g(x)$ noktasındaki değeri alınır.

Örnek. Herhangi bir $t \geq 0$ anında konumu $x(t) = \cos(t^2 + 1)$ denklemi ile verilen bir cisim x-ekseni boyunca hareket etmektedir. Cismin hızını t nin fonksiyonu olarak bulunuz.

Çözüm. Hızın $\frac{dx}{dt}$ olduğunu biliyoruz. Burada $x(t)$, $x = \cos u$

ve $u = t^2 + 1$ fonksiyonlarının bileşkesidir. Bu durumda

$$\frac{dx}{du} = -\sin(u) \quad \text{ve} \quad \frac{du}{dt} = 2t$$

olup, zincir kuralına göre

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} \cdot \frac{du}{dt} = -\sin(u) \cdot 2t = -2t \sin(t^2 + 1)$$

elde edilir.

Zincir kuralı diğer trigonometrik fonksiyonlara da uygulanırsa, aşağıdaki türev kuralları elde edilir:

$$\frac{d}{dx}[\sin u] = (\cos u) u'$$

$$\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sin u) u'$$

$$\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u) u'$$

$$\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u) u'$$

$$\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u) u'$$

$$\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u) u'$$

Örnek.

a. $y = \sin \overbrace{2x}^u$

$$y' = \overbrace{\cos 2x}^{\cos u} \overbrace{\frac{d}{dx}[2x]}^{u'} = (\cos 2x)(2) = 2 \cos 2x$$

b. $y = \cos \overbrace{(x-1)}^u$

$$y' = \overbrace{-\sin(x-1)}^{-\sin u} \overbrace{\frac{d}{dx}[x-1]}^{u'} = -\sin(x-1)$$

Örnek.

a. $y = \cos 3x^2 = \cos(3x^2)$

$$y' = (-\sin 3x^2)(6x) = -6x \sin 3x^2$$

b. $y = (\cos 3)x^2$

$$y' = (\cos 3)(2x) = 2x \cos 3$$

c. $y = \cos(3x)^2 = \cos(9x^2)$

$$y' = (-\sin 9x^2)(18x) = -18x \sin 9x^2$$

d. $y = \cos^2 x = (\cos x)^2$

$$y' = 2(\cos x)(-\sin x) = -2 \cos x \sin x$$

Örnek. $\sin(x^2 + x)$ fonksiyonunun x e göre türevini alalım.

Eğer zincir kuralı doğrudan uygulanırsa,

$$\frac{d}{dx} \sin(x^2 + x) = \cos(x^2 + x) \cdot (2x + 1)$$

bulunur.

Bazen bir türevi bulmak için Zincir Kuralını birkaç defa uygulamak zorunda kalabiliriz.

Örnek. $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm. Burada tanjant, $(5 - \sin 2t)$ nin bir fonksiyonu, sinüs $2t$ nin bir fonksiyonu ve $2t$ de t nin bir fonksiyonudur. Bu durumda zincir kuralına göre

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(\tan(5 - \sin 2t)) = \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{d}{dt}(5 - \sin 2t) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \left(0 - \cos 2t \cdot \frac{d}{dt}(2t)\right) \\ &= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\ &= -2(\cos 2t) \sec^2(5 - \sin 2t) \end{aligned}$$

bulunur.

Bir Fonksiyonun Kuvvetleri ile Zincir Kuralı

Eğer f , u nun türevlenebilir bir fonksiyonu ve u da x in türevlenebilir bir fonksiyonu ise, $y = f(u)$ yu Zincir Kuralı formülünde yerine koyarsak,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

formülünden

$$\frac{d}{dx} f(u) = f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

formülü elde edilir.

Eğer n herhangi bir reel sayı ise ve f fonksiyonu da $f(u) = u^n$ şeklinde bir kuvvet fonksiyonu ise kuvvet kuralına göre

$$f'(u) = n u^{n-1}$$

olur. Eğer u , x in türevlenebilir bir fonksiyonu ise Zincir Kuralını kullanarak bunu Kuvvet Zincir Kuralı olarak genişletebiliriz:

$$\frac{d}{dx} (u^n) = n u^{n-1} \frac{du}{dx}, \quad \text{burada} \quad \frac{d}{du} (u^n) = n u^{n-1}.$$

Örnek.

$$\frac{d}{dx} (5x^3 - x^4)^7 = 7(5x^3 - x^4)^6 \frac{d}{dx} (5x^3 - x^4) = 7(5x^3 - x^4)^6 (15x^2 - 4x^3)$$

$$\text{Örnek.} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3x-2} \right) = \frac{d}{dx} (3x-2)^{-1} = -1(3x-2)^{-2} \frac{d}{dx} (3x-2)$$

$$= -1(3x-2)^{-2} (3) = -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

Örnek.

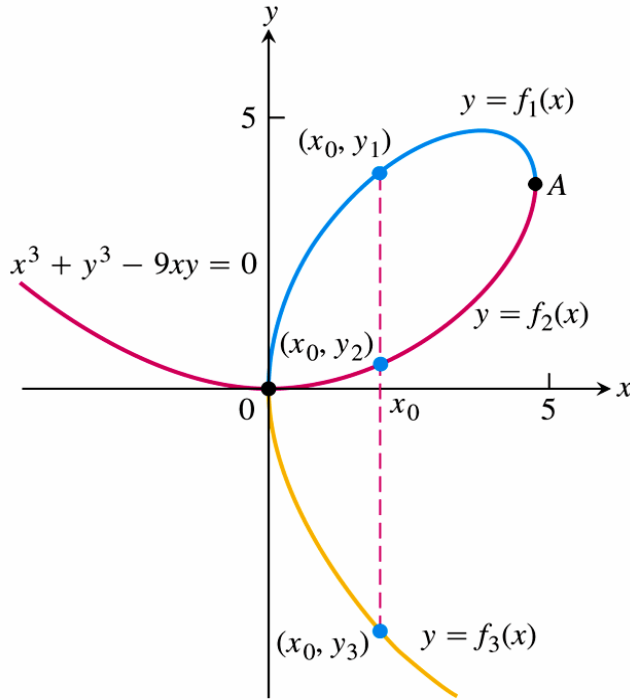
$$\frac{d}{dx}(\sin^5 x) = 5 \sin^4 x \frac{d}{dx}(\sin x) = 5 \sin^4 x \cos x$$

Kapalı Fonksiyonlarda Türev

Bu bölüme kadar incelediğimiz fonksiyonlar x değişkenine bağlı y nin açıkça yazılabildiği $y = f(x)$ denklemleriyle ifade edilebiliyordu.

Ancak denklemleri $x^3 + y^3 - 9xy = 0$, $y^2 - x = 0$ veya $x^2 + y^2 - 25 = 0$ şeklinde olan fonksiyonlarla da karşılaşabiliriz.

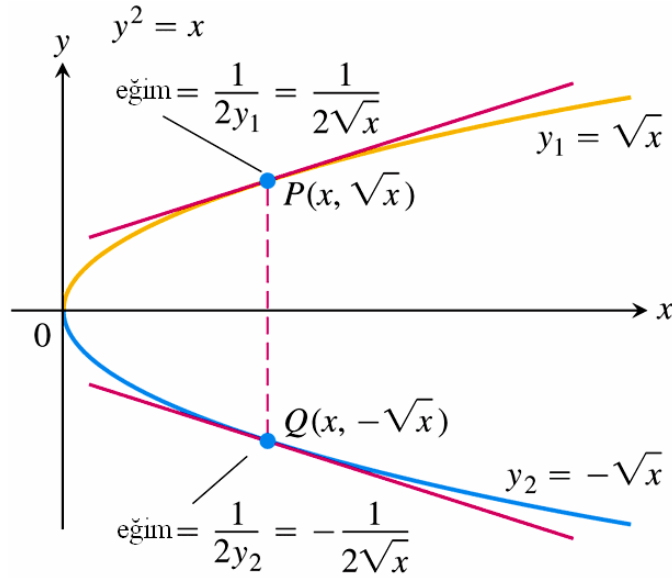
$F(x, y) = 0$ şeklindeki fonksiyonlara **kapalı fonksiyonlar** denir.



$x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisi x değişkenine bağlı herhangi bir fonksiyon değildir. Ancak eğri, çeşitli yay parçalarına bölünebilir. Bu parçalar x e bağlı fonksiyonların grafikleridir.

Örnek. $y^2 = x$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini bulalım.

$y^2 = x$ fonksiyonu, türevi alınabilir iki fonksiyon tanımlar. Bunlar $y_1 = \sqrt{x}$ ve $y_2 = -\sqrt{x}$ fonksiyonlarıdır. $x > 0$ için her iki fonksiyonun türevi $\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ bulunur.



Bu türevi bulmanın bir başka yolu daha vardır. Bunun için $y = f(x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilir olduğu kabul edilerek $y^2 = x$ denkleminin x e göre her iki tarafının türevi alınır.

$$y^2 = x \quad \text{Zincir Kuralı} \quad \frac{d}{dx}(y^2) =$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \frac{d}{dx}(f(x))^2 = 2f(x)f'(x) = 2y \frac{dy}{dx}$$

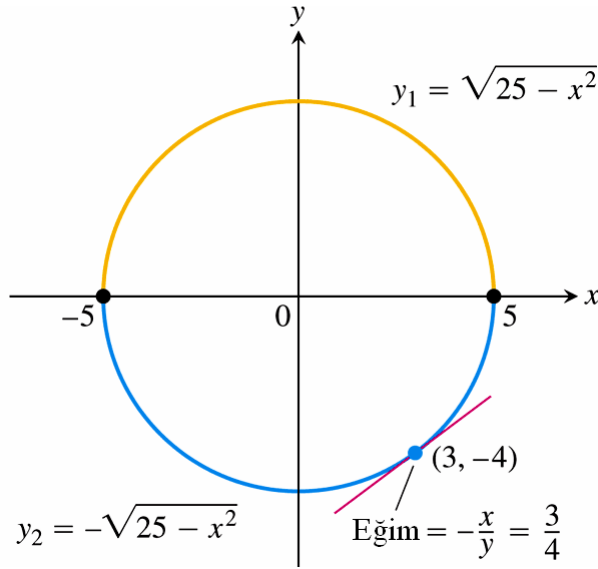
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

Bu formül her iki $y_1 = \sqrt{x}$ ve $y_2 = -\sqrt{x}$ fonksiyonları için hesapladığımız türevleri verir:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ve} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = \frac{1}{2(-\sqrt{x})} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} .$$

Örnek. $(3, -4)$ noktasında $x^2 + y^2 = 25$ çemberinin eğimini bulunuz.

Çözüm.



Çember sadece bir x fonksiyonuna bağlı bir grafik değildir. $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ ve $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ fonksiyonlarının grafiğinin birleşimidir. $(3, -4)$ noktası y_2 fonksiyonunun grafiği üzerindedir.

O halde Kuvvet Zincir Kuralını kullanarak türevi hesaplayıp eğimi bulabiliriz:

$$\left. \frac{dy_2}{dx} \right|_{x=3} = \frac{d}{dx} \left(- (25 - x^2)^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{x=3} = -\frac{1}{2} (25 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) \Big|_{x=3} = \frac{3}{4}$$

bulunur.

Bu problemi daha kolay bir şekilde de çözebiliriz. Bunun için verilen kapalı çember denkleminin x değişkenine göre türevi alınır:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ ise buradan $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ bulunur. Böylece

$(3, -4)$ noktasındaki eğim $-\frac{x}{y} \Big|_{(3, -4)} = \frac{3}{4}$ olarak bulunur.

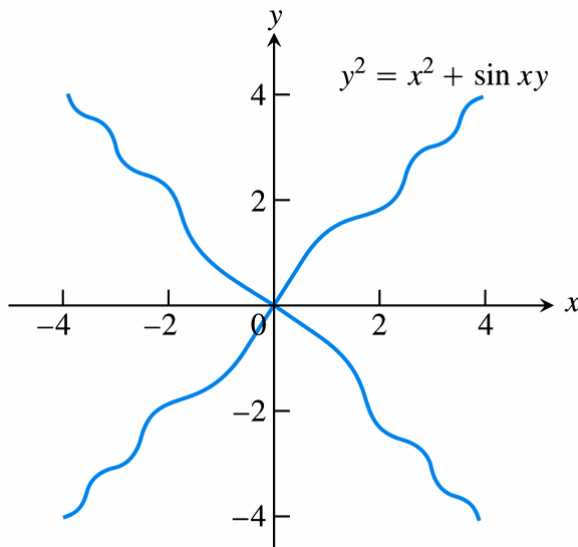
Kapalı Türev

1. y fonksiyonunun x değişkenine göre türevlenebilir bir fonksiyon olduğu düşünülerek, denklemin her iki tarafının x değişkenine göre türevi alınır.

2. $\frac{dy}{dx}$ terimini çarpan olarak bulunduran ifadeler denklemin bir tarafında toplanır ve denklem $\frac{dy}{dx}$ için çözülür.

Örnek. $y^2 = x^2 + \sin xy$ ise $\frac{dy}{dx}$ türevini bulunuz.

Çözüm.



$$y^2 = x^2 + \sin xy$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin xy)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x + \cos xy \frac{d}{dx}(xy)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 2x + \cos xy \left(y + x \frac{dy}{dx} \right)$$

$$(2y - x \cos xy) \frac{dy}{dx} = 2x + y \cos xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y \cos xy}{2y - x \cos xy}$$

Yüksek Mertebeden Türevler

Kapalı türevler yüksek mertebeden türevleri bulmak için de kullanılır.

Örnek. $2x^3 - 3y^2 = 8$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ türevini bulunuz.

Çözüm. $\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

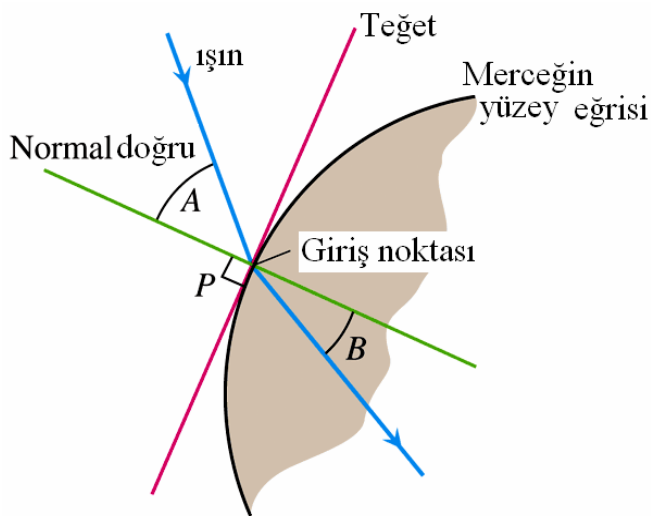
$$y' = \frac{x^2}{y}, \quad y \neq 0$$

bulunur. y'' türevini bulmak için bölüm kuralı uygulanırsa $y \neq 0$ için

$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{y} \right) = \frac{2xy - x^2 y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot y' \\ &= \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \cdot \frac{x^2}{y} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \end{aligned}$$

elde edilir.

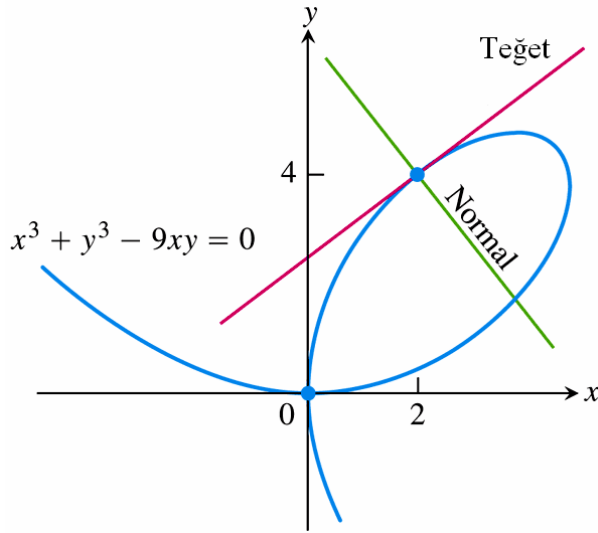
Mercekler, Teğetler ve Normaller



Bir merceğe vuran ışığın yönünü nasıl değiştirdiğini modelleyen yasaya göre, ışığın merceğe vurduğu noktadan geçen dik doğru ile ışığın kırılmadan önce ve kırıldıktan sonra yaptığı açılar önemli açılardandır. Gelme noktasındaki dik doğruya normal doğru denir. Normal doğru merceğin yüzey eğrisinin teğetine diktir.

Örnek. $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ eğrisinin $(2, 4)$ noktasındaki teğet ve normalini bulunuz.

Çözüm.



$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - 9x \frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

$$(3y^2 - 9x) \frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0$$

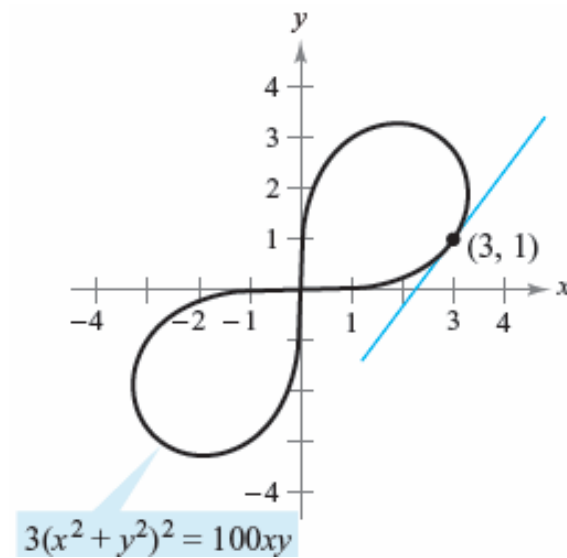
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

Türevin $(2, 4)$ noktasındaki değeri $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(2,4)} = \frac{4}{5}$ bulunur. Buna göre

$(2, 4)$ noktasındaki teğet denklemi, $(2, 4)$ noktasından geçen ve eğimi $\frac{4}{5}$ olan doğrudur: $y = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$

$(2, 4)$ noktasındaki normal, teğet denkleme dik olduğundan, $(2, 4)$ noktasından geçen ve eğimi $-\frac{5}{4}$ olan doğrudur: $y = -\frac{5}{4}x + \frac{13}{2}$

Örnek. $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ fonksiyonunun $(3, 1)$ noktasındaki grafiğinin eğimini bulunuz.



$$\frac{d}{dx}[3(x^2 + y^2)^2] = \frac{d}{dx}[100xy]$$

$$3(2)(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100\left[x\frac{dy}{dx} + y(1)\right]$$

$$12y(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} - 100x\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$[12y(x^2 + y^2) - 100x]\frac{dy}{dx} = 100y - 12x(x^2 + y^2)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{100y - 12x(x^2 + y^2)}{-100x + 12y(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{25y - 3x(x^2 + y^2)}{-25x + 3y(x^2 + y^2)}\end{aligned}$$

olup, fonksiyonun $(3,1)$ noktasındaki grafiğinin eğimi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25(1) - 3(3)(3^2 + 1^2)}{-25(3) + 3(1)(3^2 + 1^2)} = \frac{25 - 90}{-75 + 30} = \frac{-65}{-45} = \frac{13}{9}$$

olarak bulunur.

Diferansiyeller

y fonksiyonunun x değişkenine göre türevi $\frac{dy}{dx}$ ile gösterilir. Ancak bu bir oran değildir. Şimdi dx ve dy olarak iki yeni değişken tanımlayacağız. Bunların özelliği, türevin var olması durumunda oranlarının türeve eşit olmasıdır.

Tanım. $y = f(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon olsun. dx diferansiyeli bağımsız bir değişkendir. dy diferansiyeli ise

$$dy = f'(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek. $y = x^5 + 37x$ fonksiyonu için dy diferansiyeli

$$dy = (5x^4 + 37)dx$$

olur.

Bazen $dy = f'(x)dx$ yerine $df = f'(x)dx$ yazılır. df , f in diferansiyeli olarak adlandırılır. Örneğin $f(x) = 3x^2 - 6$ ise

$$df = d(3x^2 - 6) = 6x dx$$

olarak bulunur. Yine

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{in diferansiyel karşılığı} \quad d(u+v) = du + dv,$$

$$\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \frac{du}{dx} \quad \text{in diferansiyel karşılığı} \quad d(\sin u) = \cos u du$$

..... olur.

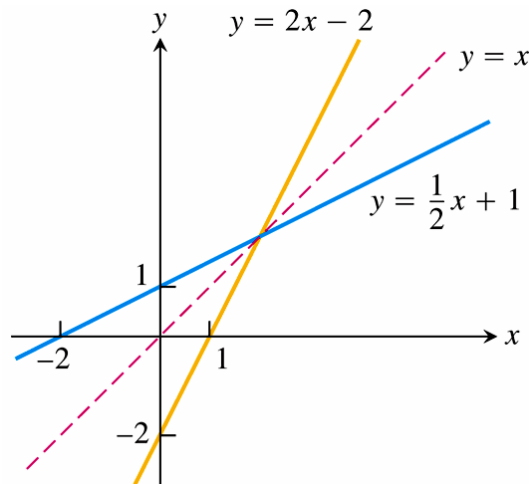
Örnek. $d(\tan 2x) = \sec^2(2x) d(2x) = 2\sec^2 2x dx$

Örnek. $d\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{(x+1)dx - x d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x dx + dx - x dx}{(x+1)^2} = \frac{dx}{(x+1)^2}$

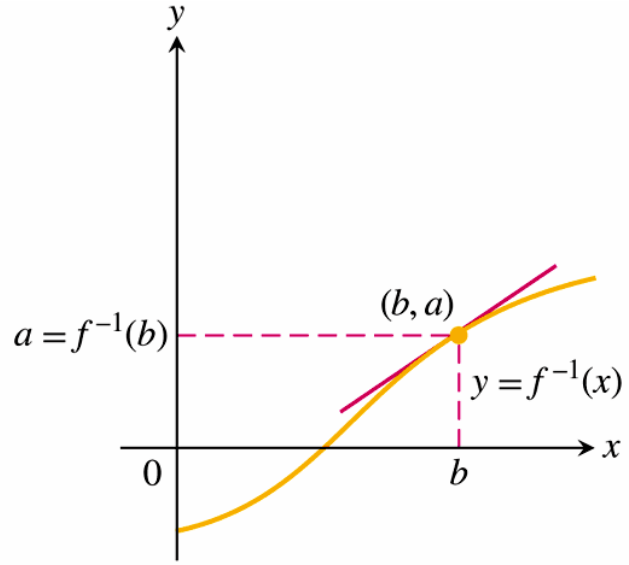
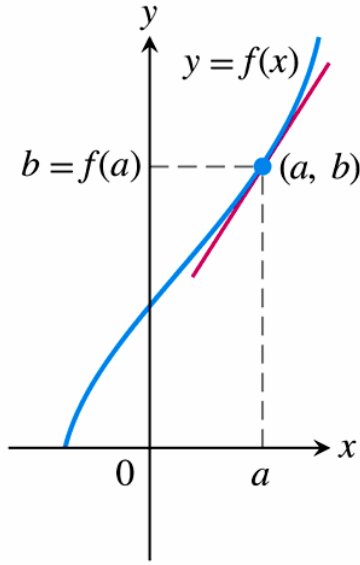
Türevlenebilir Fonksiyonların Terslerinin Türevleri

$f(x) = \frac{x}{2} + 1$ ve $f^{-1}(x) = 2x - 2$ fonksiyonlarının türevleri

$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{2}$ ve $\frac{d}{dx} f^{-1}(x) = 2$ dir. Buna göre bir fonksiyonun türevi ile tersinin türevi, birbirlerinin çarpmaya göre tersidir. Bu nedenle bir doğrunun eğimi, kendi tersi olan doğrunun eğiminin çarpmaya göre tersidir.



Yatay olmayan veya dikey olmayan herhangi bir doğrunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğini almak her zaman doğrunun eğimini tersine çevirir. Eğer orijinal doğrunun eğimi $m \neq 0$ ise simetriğinin eğimi $\frac{1}{m}$ olur.



Eğimler birbirinin tersidir : $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ veya $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

Ters Fonksiyonlar için Türev Kuralı

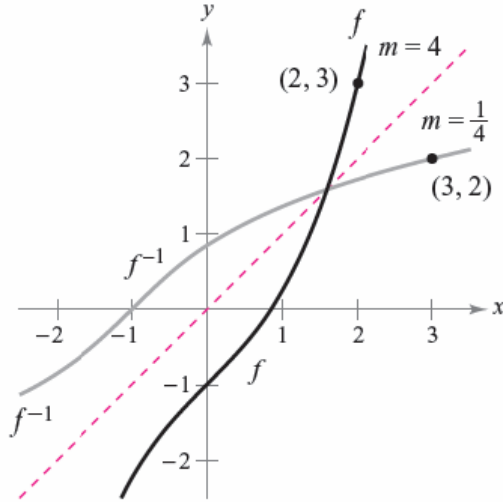
f fonksiyonu I aralığı üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon, g de f nin ters fonksiyonu olsun. Bu takdirde $f'(g(x)) \neq 0$ olan her x noktası için g fonksiyonu da türevlenebilirdir ve türevi

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0$$

şeklindedir.

Örnek. $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(3) = ?$

Çözüm.



$f(2) = 3$ olduğundan $f^{-1}(3) = 2$ olur.

Yine $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 + 1$ olup,

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(2)}.$$

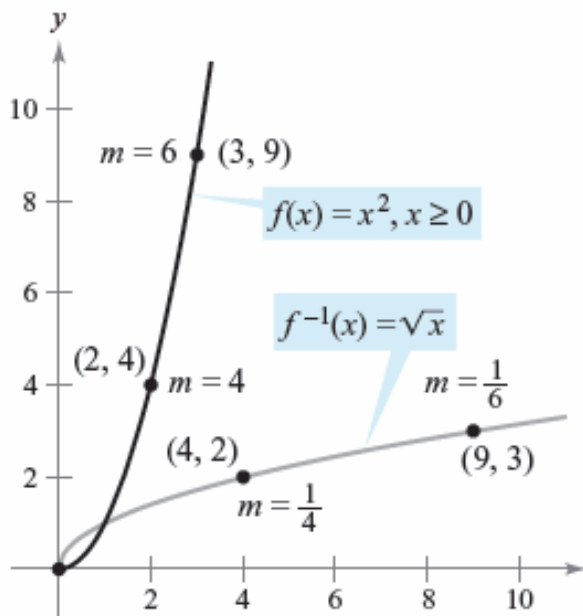
$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{\frac{3}{4}(2^2) + 1} = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Örnek. $f(x) = x^2$ ($x \geq 0$) ise $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ olur. f ve f^{-1} fonksiyonlarının aşağıdaki noktalara karşılık gelen eğimlerini bulunuz.

a. $(2, 4)$ ve $(4, 2)$ b. $(3, 9)$ ve $(9, 3)$

Çözüm.



$$f'(x) = 2x \text{ ve } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

a. f nin $(2, 4)$ noktasındaki eğimi

$f'(2) = 2(2) = 4$ olur. Yine f^{-1}

in $(4, 2)$ noktasındaki eğimi,

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$

olarak bulunur.

Örnek. $f(x) = \tan x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

$$g(x) = \arctan x$$

$$f'(x) = \sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(\arctan x)} = \frac{1}{[\tan(\arctan x)]^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

u , x e göre türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d}{dx}[\arcsin u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

Örnek. $y = \arcsin x, \quad -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$

$$\sin y = x$$

Kapalı Fonksiyonların türev kuralı kullanılırsa

$$\sin y = x$$

$$(\cos y) \left(\frac{dy}{dx} \right) = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

elde edilir.

Yine u , x e göre türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, zincir kuralı kullanılarak

$$\frac{d}{dx}[\arcsin u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \quad u' = \frac{du}{dx}.$$

Örnek.

$y = \arcsin x + x\sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun türevi

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x\left(\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-1/2} + \sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} \\ &= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2} \\ &= 2\sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Örnekler.

$$\begin{aligned} \text{a. } \frac{d}{dx}[\arcsin(2x)] &= \frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} & u = 2x \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{d}{dx}[\arctan(3x)] &= \frac{3}{1+(3x)^2} & u = 3x \\ &= \frac{3}{1+9x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \frac{d}{dx}[\arcsin \sqrt{x}] &= \frac{(1/2)x^{-1/2}}{\sqrt{1-x}} & u = \sqrt{x} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} e^{2x}] &= \frac{2e^{2x}}{e^{2x} \sqrt{(e^{2x})^2 - 1}} \quad u = e^{2x} \\ &= \frac{2e^{2x}}{e^{2x} \sqrt{e^{4x} - 1}} = \frac{2}{\sqrt{e^{4x} - 1}} \end{aligned}$$

Kuvvet Fonksiyonu

Tanım. $a > 0$, $a \neq 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x) = a^x$$

şeklindeki fonksiyonlara kuvvet fonksiyonu denir.

Örnek. $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



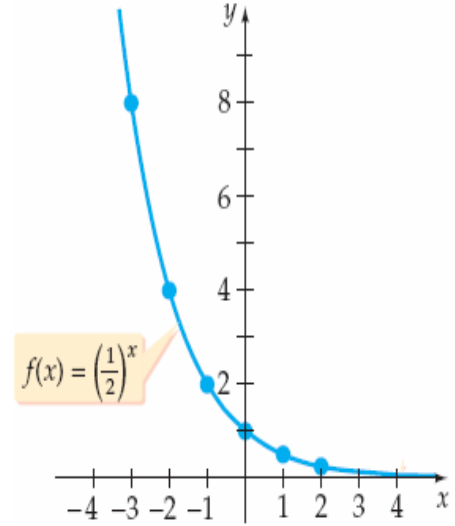
x	$y = f(x) = 2^x$	(x, y)
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
0	$f(0) = 2^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 2^1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$f(3) = 2^3 = 8$	$(3, 8)$

Fonksiyon y eksenini $(0, 1)$ noktasında keser. $x \rightarrow -\infty$ için

$f(x) \rightarrow 0$ olur. Grafik düzgün, sürekli ve artan bir eğridir.

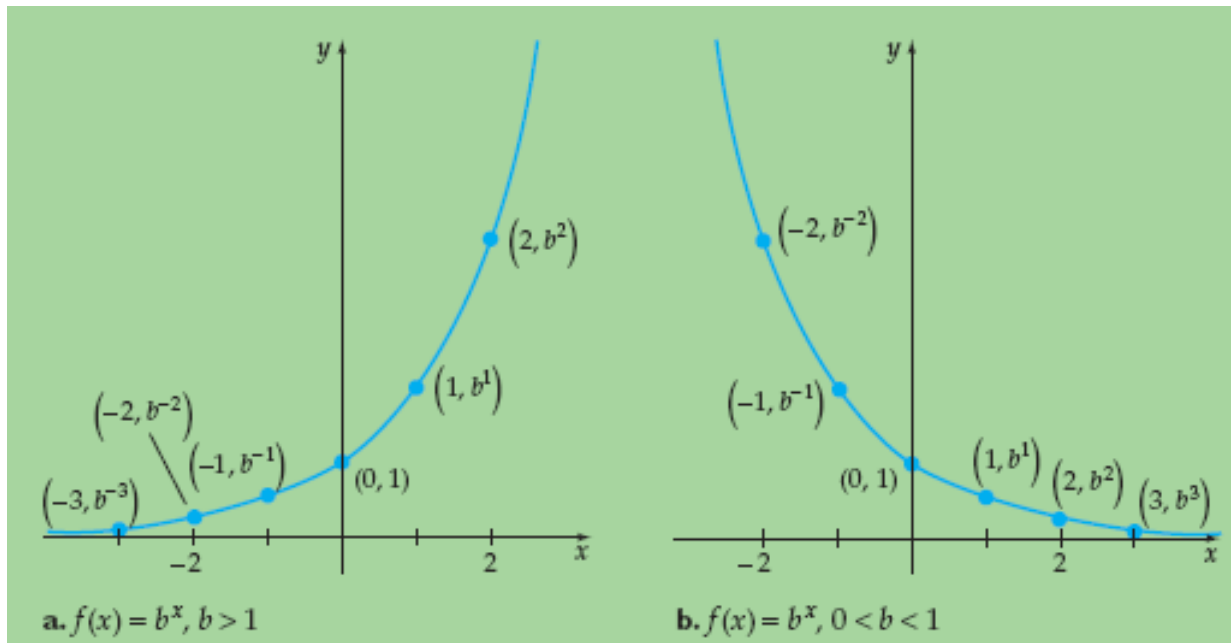
Örnek. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

x	$y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
-3	$f(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	$(-3, 8)$
-2	$f(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$(-1, 2)$
0	$f(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$f(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$



Fonksiyon y eksenini $(0,1)$ noktasında keser. $x \rightarrow \infty$ için $f(x) \rightarrow 0$ olur. Grafik düzgün, sürekli ve azalan bir eğridir.

Kuvvet Fonksiyonlarının Özellikleri

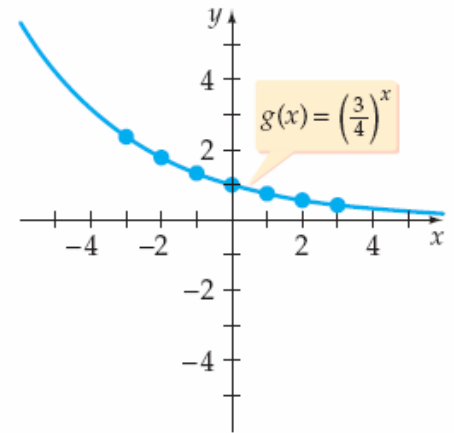


$b > 0$, $b \neq 1$ ve $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = b^x$ fonksiyonu

1. Birebir bir fonksiyondur. Tanım kümesi $\mathbb{R}$, görüntü kümesi ise pozitif reel sayılardır.
2. grafiği düzgün bir fonksiyondur. Süreklidir. y eksenini $(0,1)$ noktasında keser. Grafik $(1,b)$ noktasından geçer.
3. $b > 1$ ise fonksiyon artandır. $x \rightarrow -\infty$ için $f(x) \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$ için $f(x) \rightarrow \infty$ olur.
4. $0 < b < 1$ ise fonksiyon azalandır. $x \rightarrow -\infty$ için $f(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$ için $f(x) \rightarrow 0$ olur.

Örnek. $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

x	$y = g(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$	(x, y)
-3	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{64}{27}$	$\left(-3, \frac{64}{27}\right)$
-2	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \frac{16}{9}$	$\left(-2, \frac{16}{9}\right)$
-1	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{3}$	$\left(-1, \frac{4}{3}\right)$
2	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$	$\left(2, \frac{9}{16}\right)$
3	$\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$	$\left(3, \frac{27}{64}\right)$

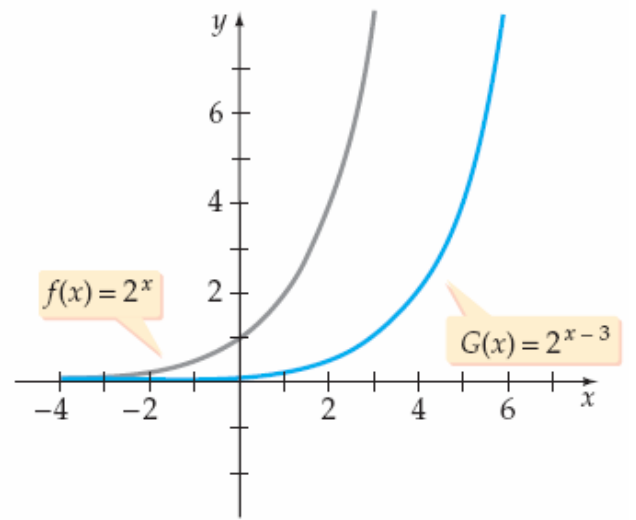
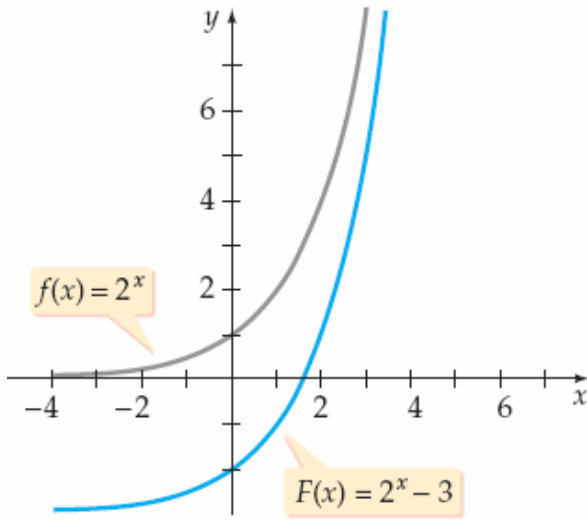


Örnek. $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $F(x) = 2^x - 3$ ve $G(x) = 2^{x-3}$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

Çözüm.

$$F(x) = 2^x - 3 = f(x) - 3$$

$$G(x) = 2^{x-3} = f(x - 3)$$

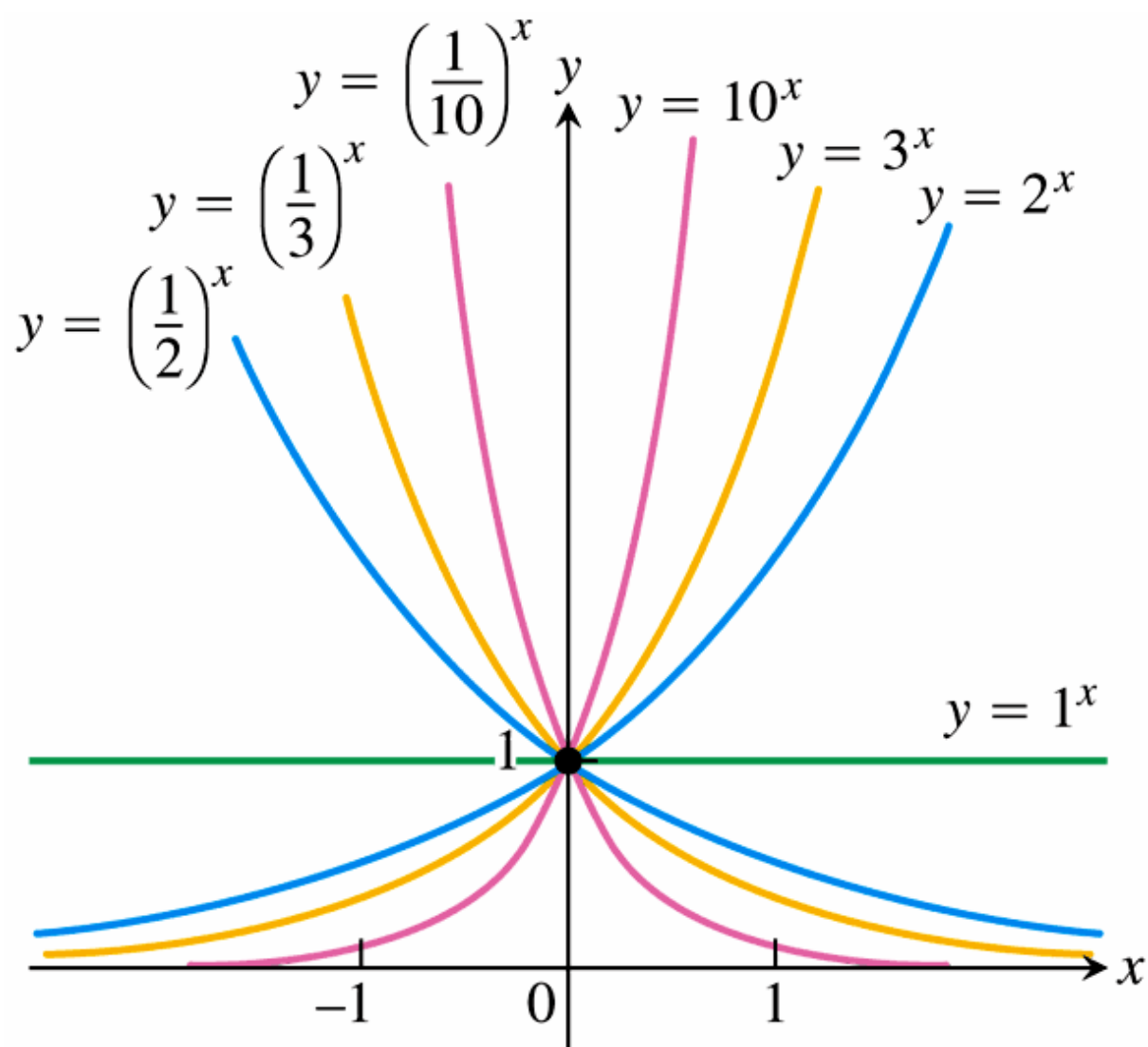
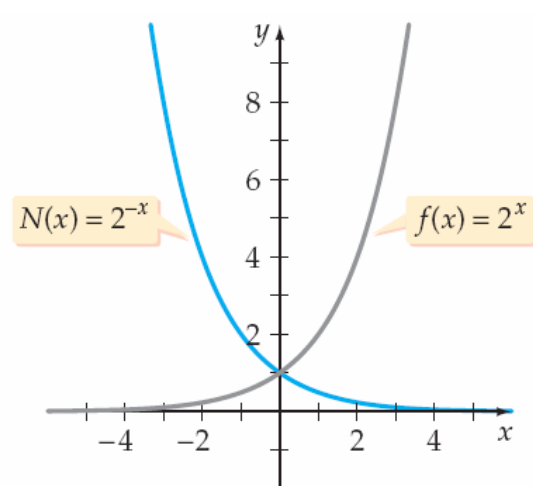
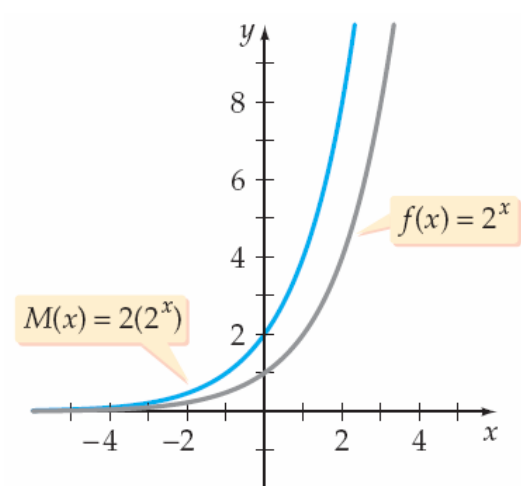


Örnek. $f(x) = 2^x$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $M(x) = 2(2^x)$ ve $N(x) = 2^{-x}$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.

Çözüm.

$$M(x) = 2(2^x) = 2f(x)$$

$$N(x) = 2^{-x} = f(-x)$$



Tanım. e sayısı, n sayısı sınırsız olarak arttığında

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ifadesinin yaklaştığı sayı olarak tanımlanır.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374246
100	2.704813829
1000	2.716923932
10,000	2.718145927
100,000	2.718268237
1,000,000	2.718280469
10,000,000	2.718281693

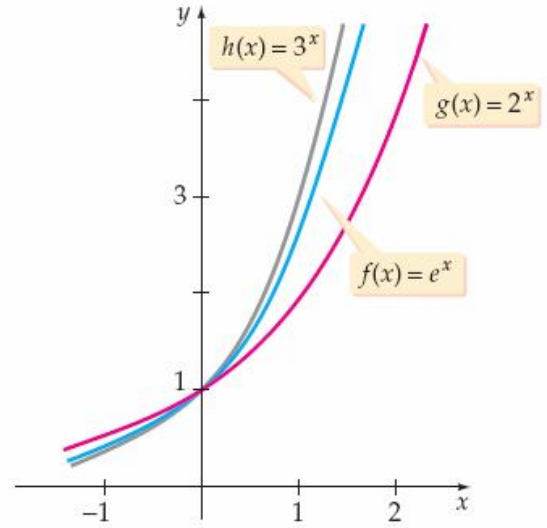
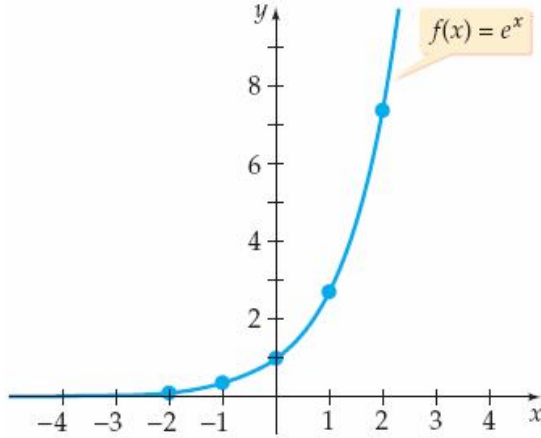
Tanım. Her $x \in \mathbb{R}$ için

$$f(x) = e^x$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona doğal kuvvet fonksiyonu denir.

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun grafiği :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = e^x$	0.1	0.4	1.0	2.7	7.4



Logaritma Fonksiyonu

$g(x) = b^x$ şeklindeki her kuvvet fonksiyonu bire bir ve örten fonksiyondur. Dolayısıyla tersi vardır ve

$$g(x) = b^x \Rightarrow y = b^x \Rightarrow x = b^y$$

yazılır.

Tanım. $x > 0$ ve $b \neq 1$ pozitif bir sabit sayı ise

$$y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$$

olmasıdır. $\log_b x$ ifadesi “ x in b tabanına göre logaritması” şeklinde

okunur. $f(x) = \log_b x$ fonksiyonuna da b tabanına göre logaritma

fonksiyonu denir. Bu fonksiyon $g(x) = b^x$ fonksiyonunun tersidir.

Logaritma fonksiyonu ile kuvvet fonksiyonunun bileşkesi:

$$g(x) = b^x \text{ ve } f(x) = \log_b x \quad (x > 0, b > 0, b \neq 1)$$

ise, bu takdirde

$$g(f(x)) = b^{\log_b x} = x \quad \text{ve} \quad f(g(x)) = \log_b b^x = x$$

elde edilir.

Logaritmanın temel özellikleri

$$1. \log_b b = 1 \quad 2. \log_b 1 = 0 \quad 3. \log_b(b^x) = x \quad 4. b^{\log_b x} = x$$

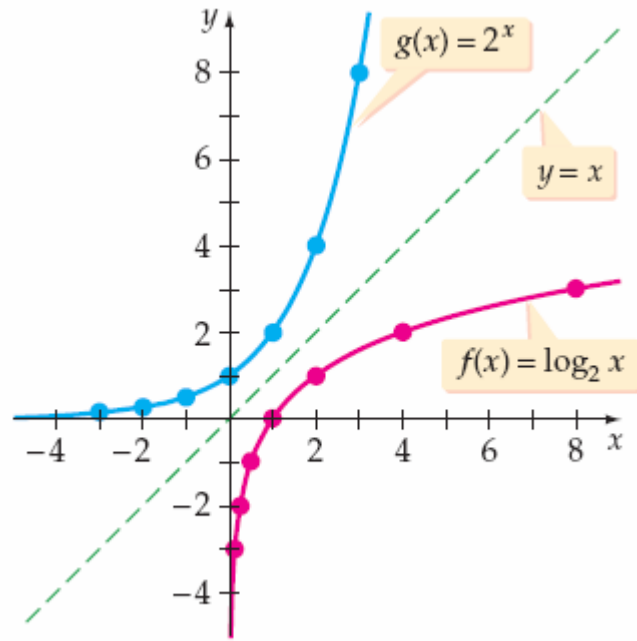
Logaritma Fonksiyonunun Grafiği

$f(x) = \log_b x$ fonksiyonu $g(x) = b^x$ fonksiyonunun tersi olduğundan, f fonksiyonunun grafiği g fonksiyonunun $y = x$ doğrusuna göre simetriğidir.

Örnek. $g(x) = 2^x$ ve $f(x) = \log_2 x$ fonksiyonlarının grafiklerini çizelim.

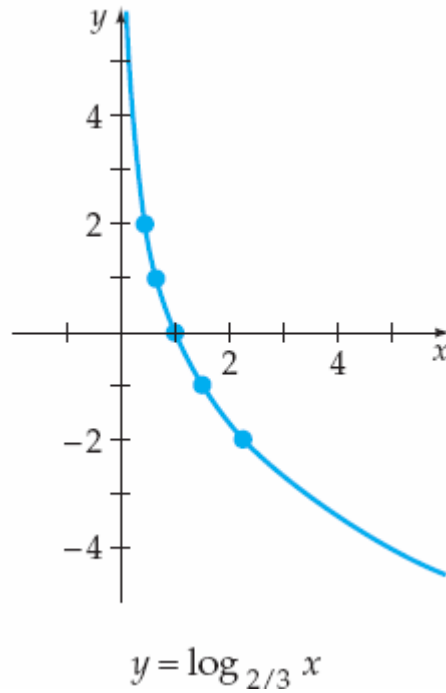
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x) = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x) = \log_2 x$	-3	-2	-1	0	1	2	3

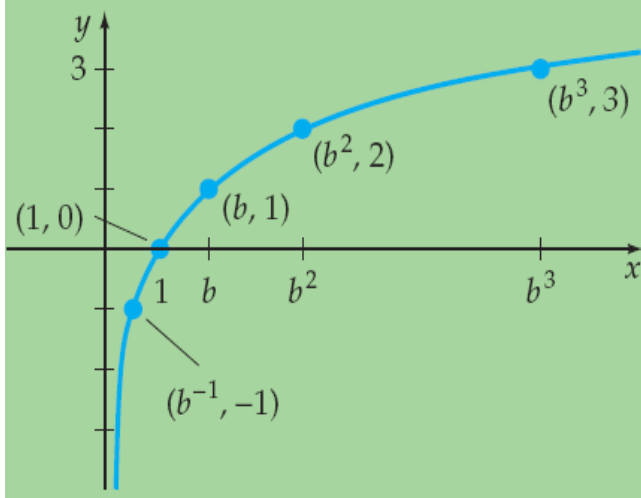


Örnek. $f(x) = \log_{\frac{2}{3}} x$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

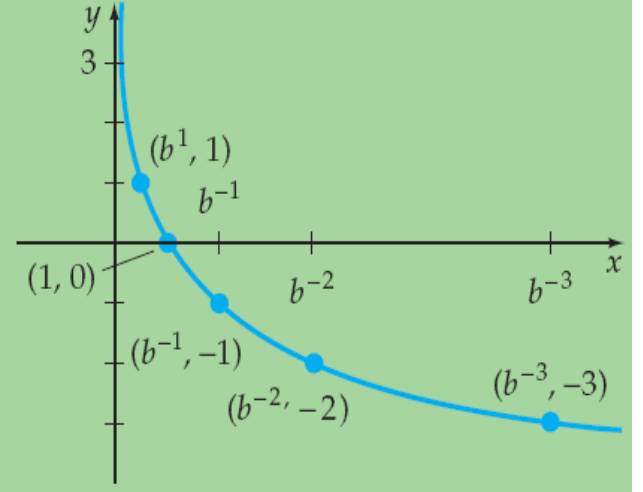
$x = \left(\frac{2}{3}\right)^y$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
y	-2	-1	0	1	2



Logaritma Fonksiyonunun Özellikleri



a. $f(x) = \log_b x, b > 1$



b. $f(x) = \log_b x, 0 < b < 1$

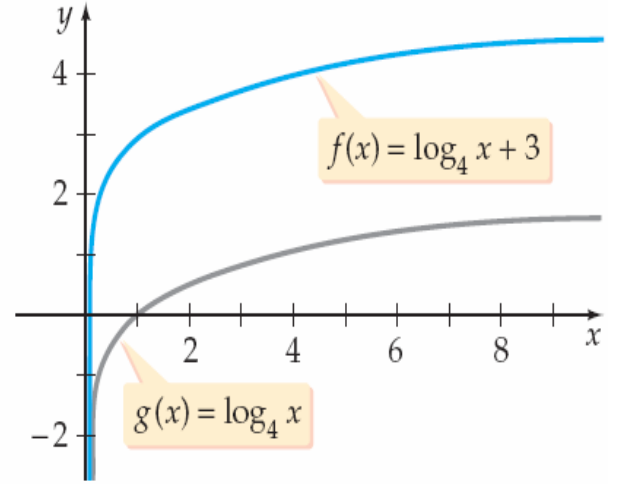
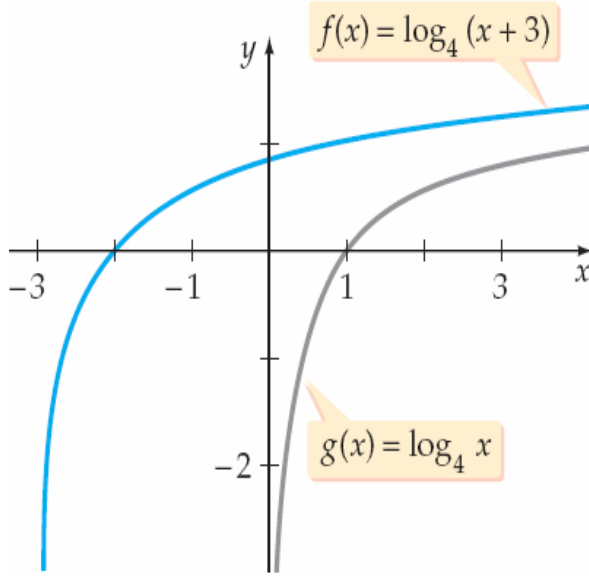
$b \neq 1$ pozitif bir sabit sayı ise $f(x) = \log_b x$ fonksiyonu

1. Tanım kümesi pozitif reel sayılar, değer kümesi $\mathbb{R}$ olan bir fonksiyondur.
2. x eksenini $(1,0)$ noktasında keser. Grafik $(b,1)$ noktasından geçer.
3. $b > 1$ ise fonksiyon artandır. $x \rightarrow 0$ için $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ için $f(x) \rightarrow \infty$ olur.
4. $0 < b < 1$ ise fonksiyon azalandır. $x \rightarrow \infty$ için $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow 0$ için $f(x) \rightarrow \infty$ olur.

Örnek. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz.

a. $f(x) = \log_4(x + 3)$

b. $f(x) = \log_4 x + 3$



Tanım. $f(x) = \log_b x$ fonksiyonunda $b=10$ ise f fonksiyonuna 10 tabanına göre logaritma fonksiyonu denir ve bu $f(x) = \log x$ şeklinde gösterilir.

Eğer $f(x) = \log_b x$ fonksiyonunda $b=e$ ise f fonksiyonuna doğal logaritma fonksiyonu denir ve bu $f(x) = \log_e x = \ln x$ şeklinde gösterilir.

Logaritma fonksiyonunun özellikleri

$b \neq 1$, M ve N pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\log_b b = 1 \quad \text{ve} \quad \log_b 1 = 0$$

$$\log_b(b^x) = x \quad \text{ve} \quad b^{\log_b x} = x$$

$$\log_b(MN) = \log_b M + \log_b N$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$$

$$\log_b(M^p) = p \log_b M$$

$$M = N \quad \text{ise} \quad \log_b M = \log_b N$$

$$\log_b M = \log_b N \quad \text{ise} \quad M = N$$

Örnek. Aşağıdaki ifadeleri 1 katsayılı tek bir logaritma şeklinde yazınız.

a. $2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x + 4)$

b. $\log_5(x^2 - 4) + 3 \log_5 y - \log_5(x - 2)^2$

Çözüm.

a.
$$\begin{aligned} 2 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x + 4) &= \ln x^2 + \ln(x + 4)^{1/2} \\ &= \ln[x^2(x + 4)^{1/2}] \\ &= \ln[x^2 \sqrt{(x + 4)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b. } & \log_5(x^2 - 4) + 3 \log_5 y - \log_5(x - 2)^2 \\
&= \log_5(x^2 - 4) + \log_5 y^3 - \log_5(x - 2)^2 \\
&= [\log_5(x^2 - 4) + \log_5 y^3] - \log_5(x - 2)^2 \\
&= \log_5[(x^2 - 4)y^3] - \log_5(x - 2)^2 \\
&= \log_5 \left[\frac{(x^2 - 4)y^3}{(x - 2)^2} \right] \\
&= \log_5 \left[\frac{(x + 2)(x - 2)y^3}{(x - 2)^2} \right] = \log_5 \left[\frac{(x + 2)y^3}{x - 2} \right]
\end{aligned}$$

Taban Değiştirme

x, a, b pozitif reel sayılar, $a \neq 1$ ve $b \neq 1$ olsun. Bu takdirde

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

yazılır. Eğer $a = e$ olursa

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

olur.

Örneğin,

$$\log_3 18 = \frac{\ln 18}{\ln 3} \approx 2.6309$$

$$\log_{12} 400 = \frac{\ln 400}{\ln 12} \approx 2.4111$$

Üstel ve Logaritmik Denklemler

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1.

$$5^x = 40$$

$$\log(5^x) = \log 40$$

$$x \log 5 = \log 40$$

$$x = \frac{\log 40}{\log 5} \approx 2.3$$

2.

$$3^{2x-1} = 5^{x+2}$$

$$\ln 3^{2x-1} = \ln 5^{x+2}$$

$$(2x - 1) \ln 3 = (x + 2) \ln 5$$

$$2x \ln 3 - \ln 3 = x \ln 5 + 2 \ln 5$$

$$2x \ln 3 - x \ln 5 = 2 \ln 5 + \ln 3$$

$$x(2 \ln 3 - \ln 5) = 2 \ln 5 + \ln 3$$

$$x = \frac{2 \ln 5 + \ln 3}{2 \ln 3 - \ln 5}$$

3.

$$\log 2x - \log(x - 3) = 1$$

$$\log \frac{2x}{x - 3} = 1$$

$$\frac{2x}{x - 3} = 10^1$$

$$2x = 10x - 30 \quad x = \frac{15}{4}$$

4.

$$\ln(3x + 8) = \ln(2x + 2) + \ln(x - 2)$$

$$\ln(3x + 8) = \ln[(2x + 2)(x - 2)]$$

$$\ln(3x + 8) = \ln(2x^2 - 2x - 4)$$

$$3x + 8 = 2x^2 - 2x - 4$$

$$0 = 2x^2 - 5x - 12$$

$$0 = (2x + 3)(x - 4)$$

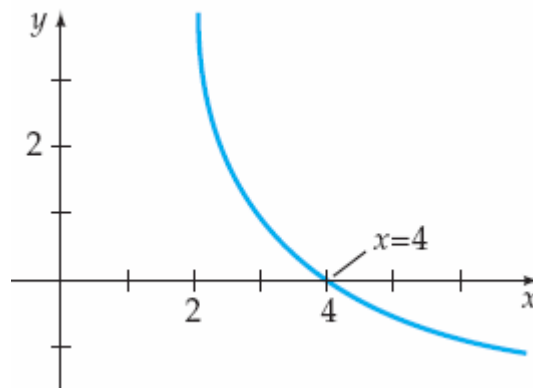
$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{or} \quad x = 4$$

Ancak

$$y = \ln(3x + 8) - \ln(2x + 2) - \ln(x - 2)$$

denklemini sadece bir noktada x-eksenini keser. O da $x=4$ noktasıdır.

Dolayısıyla denklemin tek bir reel çözümü vardır.



Üstel ve Logaritma Fonksiyonlarının Türevleri

$a \neq 1$ pozitif bir reel sayı, u , x e göre türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{d}{dx} [a^x] = (\ln a) a^x & 2. \frac{d}{dx} [a^u] = (\ln a) a^u \frac{du}{dx} \\ 3. \frac{d}{dx} [\log_a x] = \frac{1}{(\ln a)x} & 4. \frac{d}{dx} [\log_a u] = \frac{1}{(\ln a)u} \frac{du}{dx} \end{array}$$

1. $a^x = e^{(\ln a)x}$, olduğundan

$$\frac{d}{dx} [a^x] = \frac{d}{dx} [e^{(\ln a)x}] = e^u \frac{du}{dx} = e^{(\ln a)x} (\ln a) = (\ln a) a^x.$$

bulunur.

Yine 3. türev formülü

$$\frac{d}{dx} [\log_a x] = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\ln a} \ln x \right] = \frac{1}{\ln a} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{1}{(\ln a)x}.$$

şeklinde elde edilir.

Örnekler.

$$\text{a. } y' = \frac{d}{dx} [2^x] = (\ln 2) 2^x$$

$$\text{b. } y' = \frac{d}{dx} [2^{3x}] = (\ln 2) 2^{3x} (3) = (3 \ln 2) 2^{3x}$$

$$\text{c. } y' = \frac{d}{dx} [\log \cos x] = \frac{-\sin x}{(\ln 10) \cos x} = -\frac{1}{\ln 10} \tan x$$

Sonuç. Eğer $a = e$ alınırsa

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \quad \text{ve} \quad \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

olur. Ayrıca u , x e göre türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}.$$

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}, \quad u > 0.$$

Örnek.

$$y = e^{\overbrace{3x}^u} \quad y' = \overbrace{e^{3x}}^{e^u} \overbrace{\frac{d}{dx}[3x]}^{u'} = 3e^{3x}$$

Örnek.

$$y = t\sqrt{\ln t} = t(\ln t)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (\ln t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} t (\ln t)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (\ln t) \\ &= (\ln t)^{\frac{1}{2}} + \frac{t (\ln t)^{-\frac{1}{2}}}{2t} \\ &= (\ln t)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2(\ln t)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Logaritmik Türev

Çarpım, bölüm ve kuvvet içeren formüllerle verilmiş olan pozitif fonksiyonların türevleri, türev almadan önce iki tarafın da doğal logaritması alındığında daha kolay bulunur. Bu işlem türev almadan önce formülleri basitleştirmek için logaritma kurallarını kullanmamıza olanak sağlar.

Örnek.

$$y = \frac{(x - 2)^2}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \neq 2$$

fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm.

$$\ln y = \ln \frac{(x - 2)^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\ln y = 2 \ln(x - 2) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{y'}{y} = 2 \left(\frac{1}{x - 2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 2)(x^2 + 1)}$$

$$y' = y \left[\frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 2)(x^2 + 1)} \right]$$

$$= \frac{(x - 2)^2}{\sqrt{x^2 + 1}} \left[\frac{x^2 + 2x + 2}{(x - 2)(x^2 + 1)} \right]$$

$$= \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

Örnek.

$y = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1}, \quad x > 1$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Çözüm.

$$\begin{aligned}\ln y &= \ln \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1} \\&= \ln ((x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}) - \ln (x - 1) \\&= \ln (x^2 + 1) + \ln (x + 3)^{1/2} - \ln (x - 1) \\&= \ln (x^2 + 1) + \frac{1}{2} \ln (x + 3) - \ln (x - 1)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 3} - \frac{1}{x - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + 1)(x + 3)^{1/2}}{x - 1} \left(\frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2x + 6} - \frac{1}{x - 1} \right)$$