SÜREKLİLİK

Analizin temel kavramlarından biri de süreklilikdir. Sürekliliğin limit ile çok yakın ilişkisi vardır.

Tanım: $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $a \in D$ olmak üzere

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

oluyorsa, f fonksiyonu a noktasında sürekli dir denir. Eğer fonksiyon D tanım kümesinin her noktasında sürekli ise, f fonksiyonu D bölgesinin tamamında sürekli dir denir.

Limit tanımından yararlanarak bu tanımı şöyle de ifade edebiliriz:

$f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in D$ noktasında sürekli dir

$:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık,

$x \in D$ ve $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

olacak biçimde bir $\delta = \delta(a, \varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilir.

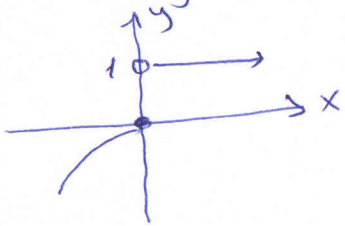
f nin sürekli olduğu noktaların kümesi süreklilik kümesi olarak adlandırılır ve S_f ile gösterilir.

Tanım (Dizisel süreklilik) $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$, $f: D \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ olan her $(x_n) \subset D$ dizisi için $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$ ise f ye a noktasında dizisel sürekli dir denir.

Bu iki tanım birbirine denktir.

Örnek: 1) $f(x) = [\![x]\!]$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. f nin tam sayılarda sağ ve sol limitleri eşit olmadığından limiti yoktur. O halde tamdeğer fonksiyonu tam olan sayılarda sürekli değildir.

2) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$



fonksiyonu sürekli midir?

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ olduğundan

f, $x=0$ da sürekli değildir.

Tanım. $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$, $a \in D$ olsun.

$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x)$, $f(a^-) = \lim_{x \to a^-} f(x)$

limitleri var olsun. Eğer

$\boxed{f(a^-) = f(a)}$ ise f ye a noktasında soldan sürekli dir

$\boxed{f(a^+) = f(a)}$ ise f ye a noktasında sağdan sürekli dir

denir.

Örneğin $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonu her $a \in \mathbb{Z}$ tamsayı noktalarında sağdan sürekli iken soldan süreksizdir. Çünkü $a \in \mathbb{Z}$, $f(a) = a$, $f(a^-) = a-1$, $f(a^+) = a$ dır.

Açıktır ki

f, $a \in D$ noktasında sürekli dir $\Leftrightarrow f(a^+) = f(a^-) = f(a)$ dır.

Bir fonksiyon $a \in D$ noktasında süreksiz ise şu durumlar mevcuttur.

Tanım: Süreksizlik Çeşitleri

$f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in D$ noktasında süreksiz olsun.

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ limiti var fakat bu limit değeri $f(a)$ ya eşit değilse ya da f a da tanımlı değilse bu tür süreksizliklere kaldırılabilir süreksizlik denir. Burada $f(a)$ değeri limite eşit olacak şekilde tanımlanırsa süreksizlik ortadan kalkar.

Örneğin; $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonu $x=2$ noktasında tanımsızdır. Dolayısıyla f süreksizdir.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

şeklinde yeniden tanımlanan fonksiyon süreklidir.

2) f nin a noktasında $f(a^+)$ sağ, $f(a^-)$ sol limitleri var fakat bu limitler farklı olabilir $f(a^+) \neq f(a)$ veya $f(a^-) \neq f(a)$ olabilir. Bu durumda a noktasına f nin sıçramalı süreksizlik noktası (veya 1. çeşit süreksizlik) denir.

$$\left| \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) \right|$$

değerine f nin a noktasındaki sıçraması denir.

3) $f(a^+)$ sağ, $f(a^-)$ sol limitlerinden en az biri yoksa ya da $f(a^-) = \mp\infty$ (veya $f(a^+) = \mp\infty$) ise a noktasına f nin esas süreksizlik noktası (veya 2. çeşit süreksizlik noktası) denir.

Örnek:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ fonksiyonu $a=0$ noktasında 1. çeşit süreksizlik noktasına sahiptir. Çünkü;
$f(0^-) = -1$, $f(0^+) = 1$, $f(0) = 0$, $f(0^-) \neq f(0)$, $f(0^+) \neq f(0)$

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ Dirichlet fonksiyonu her $a \in \mathbb{R}$ noktasında süreksizdir.
$a=0$ noktası f nin esas süreksizlik noktasıdır.

3) $x=1$ noktası $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ fonksiyonu için esas süreksizlik noktasıdır Çünkü, $f(1^+) = -\infty$, $f(1^-) = +\infty$ dır.

4) $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu $\forall a \in \mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ mevcut değildir. Dolayısıyla $\forall a \in \mathbb{R}$ noktası f nin 2. çeşit (esas) süreksizlik noktasıdır.

5) $x=0$, $f(x) = |\operatorname{sgn} x|$ fonksiyonunun kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır. Çünkü
$f(0^-) = f(0^+) = 1$, $f(0) = 0$.

Teorem: $D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: D \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $a \in D$ noktasında sürekli ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ise

a) $\alpha f + \beta g$ fonksiyonu da $a \in D$ noktasında süreklidir.

b) $f \cdot g$ fonksiyonu $a \in D$ noktasında süreklidir.

c) $\forall x \in D$ için $g(x) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da $a \in D$ noktasında süreklidir.

Teorem: $A, B \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$, $g: B \to \mathbb{R}$ fonksiyonları veriliyor. $f(A) \subset B$ olmak üzere, f fonksiyonu $a \in A$ noktasında, g fonksiyonu $f(a) \in B$ noktasında sürekli ise $g \circ f$ fonksiyonu a noktasında süreklidir.

İspat: f, $x = a$ noktasında sürekli $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$,

$g(u)$, $u = f(a)$ noktasında sürekli $\Rightarrow \lim\limits_{u \to f(a)} g(u) = g(f(a))$

yazılır. Bileşke fonksiyonun limiti teoremine göre

$\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ dır.

Yani $g \circ f$ bileşke fonksiyonu süreklidir.

Teorem: $D \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in D$ noktasında sürekli ise $|f|: D \to \mathbb{R}$ mutlak değer fonksiyonu da $a \in D$ noktasında süreklidir.

İspat: $\big||f(x)| - |f(a)|\big| \leq |f(x) - f(a)|$ eşitsizliğinden ispat açıktır.

Süreklilik tanımları, verilen teoremler ve elementer fonksiyonların limiti ile ilgili sonuçlar yardımıyla aşağıdaki sonuçların varlığı kolayca görülür.

SONUÇ:

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c = \text{sabit}$ fonksiyonu süreklidir.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonu süreklidir.

3) $n \in \mathbb{N}$ ve $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

cebirsel polinomu $\mathbb{R}$ de süreklidir.

4) $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel fonksiyonu $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$ kümesi üzerinde süreklidir.

5) $f, g: \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ de süreklidir. (Çünkü $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$, $\lim\limits_{x \to a} \cos x = \cos a$ dır.)

6) $f: X \to \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $f(x) = \tan x$

$g: X \to \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $g(x) = \cot x$

fonksiyonları süreklidir.

7) $a > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ fonksiyonu süreklidir. (Çünkü $\lim\limits_{x \to \lambda} a^x = a^\lambda$ dır.)

8) $a > 0$, $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ fonksiyonu süreklidir. Çünkü $\lim\limits_{x \to \lambda} \log_a x = \log_a \lambda$ idi.

9) $f:[-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $f(x)=\arcsin x$ fonk. süreklidir.

10) $f:[-1,1]\to[0,\pi]$, $f(x)=\arccos x$ fonk. süreklidir.

11) $f:\mathbb{R}\to(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $f(x)=\arctan x$ " " "

12) $f:\mathbb{R}\to(0,\pi)$, $f(x)=\operatorname{arccot} x$ " " .

13) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ " " .

14) $f:\mathbb{R}\to[1,+\infty)$, $f(x)=\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ " " .

15) $f:\mathbb{R}\to(-1,1)$, $f(x)=\tanh x$ " " .

16) $f:\mathbb{R}-\{0\}\to(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$, $f(x)=\coth x$ " " .

17) Sonlu sayıda sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak elde edilen her fonksiyon tanım kümesinde süreklidir.

18) $\alpha\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x^\alpha$ kuvvet fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ da süreklidir:

$\forall a>0,\ a\neq 1,\ \forall x_0\in\mathbb{R}$ için

$$\lim_{x\to x_0} x^\alpha=\lim_{x\to x_0} a^{\alpha\log_a x}=a^{\alpha\cdot\lim_{x\to x_0}\log_a x}$$

$$=a^{\alpha\cdot\log_a x_0}=x_0^\alpha$$

$\lim_{x\to x_0} x^\alpha=x_0^\alpha$ olur.

Sürekli Fonksiyonların özellikleri

Süreklilik ile ilgili bu kısımda verilen bazı teoremlerin ispatları ve diğer ilgili teoremler ileri analiz derslerinde verilecektir.

Teorem: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

1) f fonksiyonu $[a,b]$ de sınırlıdır.

2) Weierstrass Teoremi (veya Ekstremum Değer Teoremi):

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu $[a,b]$ aralığında bir mutlak maksimum ve bir mutlak minimum değerine sahiptir. Yani $\forall x\in[a,b]$ için

$$f(x_{min})=m\le f(x)\le M=f(x_{max})$$

olacak şekilde $x_{min},\ x_{max}\in[a,b]$ noktaları vardır.

(Burada $M=f(x_M)=\max_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=f(x_m)=\min_{x\in[a,b]} f(x)$ dır.)

İspat: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Fakat $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlı olmasın. Buradan

$\forall n\in\mathbb{N}$ için $|f(x_n)|>n$

olacak şekilde bir $(x_n)\subset[a,b]$ dizisi vardır. Böylece (x_n) sınırlı olur. Bolzano-Weierstrass Teoremine göre (x_n) nin yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=t$ olsun. $t\in[a,b]$ dır.

f, $t\in[a,b]$ de sürekli olduğundan dizisel sürekliliktir. Dolayısıyla $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(t)$ olur.

Diğer taraftan her $n\in\mathbb{N}$ için $|f(x_{n_k})| > n_k$ olup,

$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$ demektir. Bu ise

$\lim\limits_{x\to t} f(x) = f(t)$ ile çelişir. Kabulümüz

yanlış olup, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ sınırlıdır.

<u>2) nin ispatı:</u> (1) den dolayı m, M vardır.

$M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ olsun. Aksini kabul edelim.

Yani $\forall x\in[a,b]$ için $f(x)\neq M$ olsun.

$$h(x) := \frac{1}{M-f(x)}, \quad x\in[a,b]$$

tanımlayalım. $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli olur.

(1) den dolayı $|h(x)| = \dfrac{1}{|M-f(x)|} \leq k$ o.ş. $k>0$ vardır.

$$|M-f(x)| > \frac{1}{k} \Rightarrow M-f(x) > \frac{1}{k} \Rightarrow f(x) < M-\frac{1}{k}$$

olur ki bu $M=\sup f(x)$ ile çelişir.

$\Big[$ $M=\sup f(x) \iff \forall \varepsilon>0,\ \exists x_\varepsilon\in[a,b]:$

$f(x_\varepsilon) > M-\varepsilon$ dır. $\Big]$

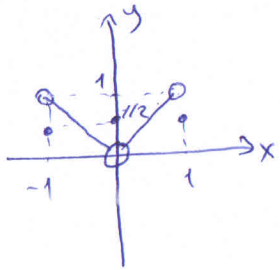
<u>Not:</u> Ekstremum Değer Teoremindeki hipotezlerin kaldırılamayacağına dair örnekler verelim:

1) $f:(0,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$ fonksiyonu $(0,1)$ açık aralığında süreklidir ancak $(0,1)$ üzerinde

$$M = \sup_{x\in(0,1)} f(x) = \sup_{x\in(0,1)} x = 1, \qquad m = \inf_{x\in(0,1)} f(x) = 0$$

değerlerine ulaşamaz.

2) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ $\quad f(x) = \begin{cases} |x|, & x\in(-1,0)\cup(0,1) \\ \frac{1}{2}, & x\in\{-1,0,1\} \end{cases}$

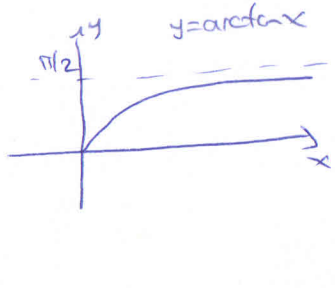


fonksiyonu $[-1,1]$ de sürekli değildir.

$m = \inf\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = 0$, $M = \sup\limits_{x\in[-1,1]} f(x) = 1$ olup,

$\forall x\in[-1,1]$ için $f(x)\neq 0$, $f(x)\neq 1$ dir. Yani f, $[-1,1]$ de max veya min. değerine ulaşamaz. Bunun nedeni f sürekli değildir.

3) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$



fonksiyonu $[0,+\infty)$ da sürekli olmasına rağmen, bu aralıkta max değere ulaşamaz. Çünkü

$$\sup\{\arctan x : x\in[0,+\infty)\} = \frac{\pi}{2}$$

ancak $\forall x\in[0,+\infty)$ için $\arctan x \neq \frac{\pi}{2}$ dir.

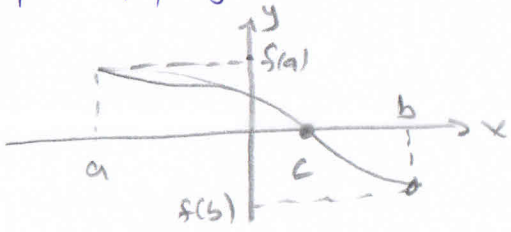
Bunun nedeni f nin tanım kümesinin sınırlı olmayışıdır.

Teorem: (Bolzano–Cauchy Teoremi)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $f(a)$ ile $f(b)$ ters işaretli ise $f(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ noktası vardır.

(Yani $f(x)=0$ eşitliğinin (a,b) aralığında çözümü vardır)

(İspatı topoloji derslerinde verilecek)



Örnek: $f(x)=x^5+2x+1$ polinomunun $[-1,1]$ aralığında bir kökü var mıdır?

$f(x)=x^5+2x+1$ polinomu $[-1,1]$ de süreklidir.

$f(-1)=-2<0$, $f(1)=4>0$

olup, Bolzano–Cauchy Teoremine göre

$f(c)=0$ olacak şekilde $c\in[-1,1]$ vardır.

Ara Değer Teoremi: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli, $f(a)=A$, $f(b)=B$ ve $A\neq B$ olsun. O zaman A ile B arasındaki her D sayısı için $f(c)=D$ olacak şekilde bir $c\in[a,b]$ vardır.

İspat: $g:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-D$ olarak tanımlansın. $A<B$ olsun. g, $[a,b]$ de sürekli ve

$$\left.\begin{array}{l} g(a)=f(a)-D=A-D<0 \\ g(b)=f(b)-D=B-D>0 \end{array}\right\}$$ olduğundan bir önceki teoreme göre $g(c)=0$ o.ş. $c\in(a,b)$ var.

$g(c)=0 \Rightarrow f(c)-D=0 \Rightarrow f(c)=D$ o.ş. $c\in(a,b)$ bulunmuş olunur.

Not: Son iki teoremdeki hipotezlerin kaldırılamayacağına dair örnekler verelim:

(1) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=[\![x]\!]-\frac{1}{3}$ fonksiyonu $[0,1]$ de süreksizdir.

$f(0)=-\frac{1}{3}<0$, $f(1)=\frac{2}{3}>0$ olmasına rağmen $f(c)=0$ olacak şekilde $c\in(0,1)$ sayısı yoktur.

(2) $f:[0,1]\cup[2,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[0,1]\\ 1, & x\in[2,3]\end{cases}$

fonksiyonu sürekli ve $f(0)=-1<0$, $f(3)=1>0$ olmasına rağmen $f(c)=0$ olacak şekilde $c\in[0,1]\cup[2,3]$ noktası yoktur. (Nedeni tanım kümesi aralık değil)

(3) $f(x)=\sqrt{x^3+1}$, $[0,2]$ de süreklidir. $f(0)=1$, $f(2)=3$ olduğundan Ara Değer Teoremi gereği $1<D<3$ özelliğindeki her D sayısı için $f(c)=D$ olacak şekilde $c\in(0,2)$ sayısı vardır. $D=2$ alınırsa $f(c)=2 \Rightarrow \sqrt{c^3+1}=2 \Rightarrow c^3=3 \Rightarrow c=\sqrt[3]{3}\in(0,2)$ olur.

(4) Aradeğer Teoreminin hipotezlerinden biri sağlanmıyorsa, bundan 'teoremin sonucu da kesinlikle sağlanmaz' şeklindeki bir yargının çıkartılmaması gerekir. Böyle bir durumda teoremin sonucunun sağlanıp sağlanmadığı denetlenmelidir. Şöyle ki;

$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

olarak tanımlanan f fonksiyonu sürekli olmadığı halde $[-1,1]$ de aradeğer özelliğine sahiptir.

Tanım: (Düzgün Süreklilik)

$f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x, y \in A$ için

$$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

olacak biçimde sadece ε na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye A kümesi üzerinde düzgün süreklidir denir.

Açıktır ki düzgün sürekli her fonksiyon sürekliydir. Ancak tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu süreklidir fakat düzgün sürekli değildir.

Çözüm: Keyfi $\varepsilon > 0$ alınsın.

$|x-y| < \delta$ olan $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |x-y|\cdot|x+y| = |x-y+2y|\cdot|x-y|$$
$$< \delta \cdot |x-y+2y|$$
$$< \delta(|x-y| + 2\cdot|y|)$$
$$< \delta(\delta + 2|y|) = \varepsilon$$

olup, aranan δ sayısı hem ε, hem de y ye bağlı olacağından düzgün sürekli değildir.

2) $f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $(0,1)$ üzerinde süreklidir ancak düzgün sürekli değildir.

3) $f: (0,1) \to (-\infty, 0)$, $f(x) = \ln x$ fonksiyonu $(0,1)$ de süreklidir fakat düzgün sürekli değildir.

4) $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ de düzgün süreklidir. (Derste yapılacak)

Teorem: Kapalı ve sınırlı bir aralıkta sürekli her fonksiyon düzgün süreklidir.

İspat: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu keyfi $c \in [a,b]$ noktasında sürekli olduğundan dizisel süreklidir.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ olan $(a_n), (b_n) \subset [a,b]$ dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(c), \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$$

yazılır. Başka bir ifadeyle $\forall \varepsilon > 0$ için

$$|a_n - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(a_n) - f(c)| < \varepsilon/2$$
$$|b_n - c| < \delta_2 \Rightarrow |f(b_n) - f(c)| < \varepsilon/2$$

olacak şekilde $\delta_1, \delta_2 > 0$ sayıları vardır.

$$|a_n - b_n| = |a_n - c + c - b_n|$$
$$\leq |a_n - c| + |b_n - c| < \delta_1 + \delta_2 = \delta$$

ve

$$|f(a_n) - f(b_n)| = |f(a_n) - f(c) + f(c) - f(b_n)|$$
$$\leq |f(a_n) - f(c)| + |f(b_n) - f(c)|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için

$a_n, b_n \in [a,b]$ ve $|a_n - b_n| < \delta \Rightarrow |f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon$

olacak şekilde ε na bağlı $\delta > 0$ sayısı vardır.

O halde f, $[a,b]$ de düzgün süreklidir.