DERSİN KODU VE ADI : MAT102.2 ANALİZ II

DERSİN SORUMLUSU : Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

UYGULAMA SORUMLUSU : Arş. Gör. Nilay SAGER

BÖLÜM 4. TÜREV

4.1. Türev Kavramı

Bu kısımda analizin önemli kavramlarından biri olan türev kavramı tanımlanacak ve bazı özel fonksiyonların türevleri bulunacaktır.

Tanım. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $a \in I$ olmak üzere,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

limiti mevcut ise, (yani ifadenin $\mathbb{R}$ de bir değeri varsa) bu limite f fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki türevi denir ve

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

ile gösterilir. Eğer f fonksiyonu I aralığının her noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonu I aralığında türevlenebilirdir denir.

- $f': I \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna da f nin I daki türev fonksiyonu denir.
- $h = x-a$ denirse $x = a+h$ olacağından f nin a noktasındaki türevi

$$\boxed{f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

biçiminde de yazılabilir.

- f fonksiyonu $y=f(x)$ ile belirtildiğinden

$\Delta y = f(x)-f(a)$, $\Delta x = x-a$ yazılırsa f nin a noktasındaki türevi, limitlerin olması halinde

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

yazılır. $\Delta x = x-a$, $\Delta y = f(x)-f(a)$ değerlerine sırasıyla, x bağımsız ve y bağımlı değişkenlerindeki değişim (artma) miktarı denir.

$y = f(x)$ denklemiyle belirli f fonksiyonunun ~~türevi~~ $x \in \mathbb{R}$ noktasındaki türevi

$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad D_x f,\quad \frac{df}{dx}(x)$$

ifadelerinden biri ile gösterilir.

Tanım. $I \subset \mathbb{R}$ ve $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $a \in D$ olmak üzere

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

sonlu limitine f nin a noktasındaki soldan türevi denir ve $f'(a-)$ ile gösterilir.

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

sonlu limitine de f nin a noktasındaki sağdan türevi denir ve $f'(a+)$ ile gösterilir.

Eğer $f'(a^-) = f'(a+)$ ise f ye a da türevlenebilirdir ve

$$f'(a) = f'(a-) = f'(a+)$$ yazılır.

$f'(a-) \neq f'(a+)$ ise f nin a da türevi yoktur denir.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in (a,b)$ noktasında türevli, a noktasında sağdan ve b noktasında soldan türevli ise f $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde türevlidir (veya türevlenebilirdir) denir.

4.1.1. Örnekler

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c =$ sabit fonksiyonu için $f'(x) = 0$ dır:

Çözüm:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ dır.

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ise $f'(x) = 1$ dir.

Çözüm: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$

3) $f(x) = x^n$ ise $f'(x) = n.x^{n-1}$ dir;

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}.\left[(\cancel{x}+h-\cancel{x}).\left((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}.x + \dots + x^{n-1}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}.x + \dots + (x+h).x^{n-2} + x^{n-1}\right]$$

$$= n.x^{n-1}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n.x^{n-1}$ olur.

4) $f(x) = \sin x$ ise $f'(x) = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} 2.\frac{\sin\frac{h}{2}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2}.\lim_{h\to 0} \cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = 1.\cos x = \cos x$$

$\Rightarrow f'(x) = \cos x$

Benzer şekilde $(\cos x)' = -\sin x$ bulunur.

5) $f(x) = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında türevi yoktur.

Çözüm: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1 \Rightarrow f'(0^-) = -1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} (1) = 1 \Rightarrow f'(0^+) = 1$$

$1 \neq -1$ old. $f'(0)$ yoktur.

Daha genel olarak $f(x) = |g(x)|$ fonksiyonunun $g(x) = 0$ özelliğindeki x noktalarında türevi yoktur.

6) $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$ ise $\boxed{f'(x)=a^x.\ln a}$ dır.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x.\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=a^x.\ln a$ dır

7) $a>0$ olmak üzere $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=\log_a x$ ise

$f'(x)=\frac{1}{x}.\log_a e$ dir:

Çözüm:

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x.\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)}{x.\ h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{x}$

$=\frac{1}{x}\lim\limits_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}.\lim\limits_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}$

$=\frac{1}{x}.\log_a\left(\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}\right)=\frac{1}{x}.\log_a e$

$f(x)=\log_a x \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{1}{x}.\log_a e}$

$a=e$ ise $f(x)=\ln x$, $f'(x)=\frac{1}{x}$ olur.

8) $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ ise $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ dır; $x\neq 0$.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h.(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\neq 0$.

9) $f(x)=\sqrt{2x+5}$ ise $f'(x)$ bulunuz. (Türev tanımını kullanarak) (ödev)

10) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<1\\ 2x-1, & x\geq 1\end{cases}$ ise $f'(1)=?$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x-1-1}{x-1}=2$, $f'(1^+)=2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}.(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}=3$, $f'(1^-)=3$

$2\neq 3$ old. $f'(1)$ türevi yoktur.

11) $f(x)=x.|x|=\begin{cases}x^2, & x\geq 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}$ ise $f'(x)=2.|x|$ olduğunu

gösteriniz. (ödev)

(12) $f(x) = [\![x]\!]$ tamdeğer fonksiyonu $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$ tam sayılarda sürekli olmadığından türevi yoktur.

Diğer yandan $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $n \leq x < n+1$, $f(x) = n$ olacağından $f'(x) = 0$ dır. Yani

$$f'(x) = \begin{cases} \text{yok}, & x \in \mathbb{Z} \text{ ise} \\ 0, & x \notin \mathbb{Z} \text{ ise} \end{cases}$$

(13) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ olduğundan $x = 0$ da türevi yoktur (sürekli olmadığı için) $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ için $f'(x) = 0$ dır.

$f(x) = \operatorname{sgn} x \Rightarrow f'(x) = 0$ dır. $(x \neq 0)$

Daha genel olarak $f(x) = \operatorname{sgn} g(x)$ ise

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & g(x) \neq 0 \text{ ise} \\ \text{yoktur}, & g(x) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

(14) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ise $f'(0) = 0$ dır;

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ old. göstermeliyiz.

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| = \left| \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} \right| = |x| \cdot \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - 0 \right| \leq |x|$$

$\lim\limits_{x \to 0} 0 = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$ old dan Sandwich Teo. göre

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ dır. Yani $f'(0) = 0$ dır.