

5.7. Rasyonel fonksiyonların integralleri

$p(x)$ ve $q(x)$ iki polinom olmak üzere $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ şeklindeki fonksiyona rasyonel fonksiyon denir. Bu kısımdan bu tip rasyonel fonksiyonların integrallerinin nasıl hesaplanacağını inceleyeceğiz.

$p(x)$ polinomunun derecesi, $q(x)$ polinomunun derecesinden büyük veya eşitse $p(x)$, $q(x)$ e bölünür. Eğer bölüm $t(x)$, kalan $r(x)$ ise

$$\frac{p(x)}{q(x)} = t(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

yazılır. Burada $r(x)$ polinomunun derecesi, $q(x)$ polinomunun derecesinden daha küçüktür. Dolayısıyla

$$\int f(x) dx = \int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int t(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

olur. $t(x)$ polinom olduğundan integrali kolay alınır. Geriye $\int \frac{r(x)}{q(x)} dx$ integralini hesaplamak kalır. Bu integrali, $q(x)$ in durumuna göre inceleyeceğiz.

1) $q(x)$, n . dereceden bir polinom ve $q(x) = 0$ denklemi birbirinden farklı n tane köke sahip olsun. Bu kökler c_1, c_2, \dots, c_n olmak üzere

$$q(x) = (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)$$

olarak yazılır.

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)} = \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{x - c_2} + \dots + \frac{A_n}{x - c_n}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır. Sonra örnekler de yapılan yol izlenir:

Örnek: 1) $\int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx$ integralini hesaplayalım:

Görüm: Payın derecesi, paydanın derecesinden büyük olduğundan polinomlarda bölme işlemi yapılır.

$$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = x - 2 + \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}$$

yazılır. $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x + 2)(x - 1)$ -2,1

$$\frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{x^2 - 6x + 2}{x(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 1}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır.

$$x^2 - 6x + 2 = (A + B + C)x^2 + (A - B + 2C)x - 2A \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} A + B + C = 1 \\ A - B + 2C = -6 \\ -2A = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -1, B = 3, C = -1 \text{ bulunur.}$$

$$\int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int (x-2) dx - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{3}{x+2} dx - \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{x^2}{2} - 2x - \ln|x| + 3\ln|x+2| - \ln|x-1| + C$$

bulunur.

Not: Katsayıları pratik yoldan da bulabiliriz.

$$\frac{x^2 - 6x + 2}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1}$$

$$x^2 - 6x + 2 = A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)$$

$$x=0 \text{ alınırsa, } 2 = -2A \Rightarrow A = -1$$

$$x=1 \text{ alınırsa } -3 = 3C \Rightarrow C = -1$$

$$x=-2 \text{ alınırsa } 18 = 6B \Rightarrow B = 3 \text{ bulunur.}$$

$$2) \int \frac{x^3 - x^2 + 2x + 3}{x^2 + 3x + 2} dx = \frac{x^2}{2} - 4x + 13\ln|x+2| - \ln|x+1| + C$$

olduğunu bulunur.

2) n , bir tam sayı $n > 1$ olsun. $q(x) = (x-a)^n$ ise

$$\frac{r(x)}{(x-a)^n} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır.

Örnek: 1) $\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4} dx = ?$

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4} \Rightarrow$$

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D$$

$$x=1 \text{ için, } D=2 \text{ bulunur. Türev alırsak, } 3x^2 = 3A(x-1)^2 + 2B(x-1) + C$$

$$x=1 \text{ için, } 3 = C \text{ bulur.}$$

tekrar türev alınırsa,

$$6x = 6A(x-1) + 2B, \quad x=1 \text{ için } 6 = 2B \Rightarrow B=3 \text{ bulunur.}$$

$$6 = 6A \Rightarrow A=1$$

$$\int \frac{x^3+1}{(x-1)^4} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \cdot \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 3 \cdot \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 2 \cdot \int \frac{dx}{(x-1)^4}$$

$$= \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} + C$$

elde edilir.

$$2) \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx = ? \quad x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x \cdot (x+1)^2$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \text{şeklinde basit kesirlere ayrılır.}$$

$$5x^2+20x+6 = A \cdot (x+1)^2 + B \cdot x \cdot (x+1) + C \cdot x$$

$$x=0, \quad \underline{6=A} \text{ bulunur. } x=-1 \text{ için } \underline{C=9}, \quad x=1 \text{ için}$$

$$5+20+6=4A+2B+C \Rightarrow B=-1 \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} dx &= 6 \cdot \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} + 9 \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= 6 \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C = \ln \left| \frac{x^6}{x+1} \right| - \frac{9}{x+1} + C \end{aligned}$$

$$3) \int \frac{x+2}{x^2(x+1)} dx = ?$$

$$\frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow x+2 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$x=0 \Rightarrow \underline{2=B}, \quad x=-1 \text{ için } \underline{C=-1}, \quad x=1 \text{ alınırsa}$$

$$3=2A+4+1 \Rightarrow A=-1$$

$$\int \frac{x+2}{x^2(x+1)} dx = - \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x+1} = -\ln|x| - \frac{2}{x} + \ln|x+1| + C$$

③ $q(x)$, birbirinden farklı ve çarpanlara ayrılamayan ikinci dereceden polinomların çarpımı olarak yazılırsa, yani

$$q(x) = (a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2) + \dots + (a_nx^2+b_nx+c_n),$$

$$(\Delta = b_i^2 - 4 \cdot a_i \cdot c_i < 0) \text{ i.e.}$$

$$\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \frac{A_2x+B_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır.

Örnek: 1) $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} dx = ? \quad x^4+3x^2+2 = (x^2+2)(x^2+1) \text{ olduğundan}$

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \Rightarrow$$

$$x^3+x^2+x+2 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} A+C &= 1 \\ B+D &= 1 \\ 2A+C &= 1 \\ 2B+D &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} A &= 0 \\ C &= 1 \\ B &= 1 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x^3+x^2+x+2}{(x^2+1)(x^2+2)} dx &= \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x dx}{x^2+2} \\ &= \arctan x + \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + C \end{aligned}$$

bulunur.

4) $q(x)$, çarpanlara ayrılamayan ikinci dereleden bir polinomun tam kuvveti şeklinde ise, yani $q(x) = (ax^2+bx+c)^k$ ise

$$\frac{r(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

teklilde basit kesirlere ayrılır.

Örnek: $\int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} dx = ?$

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$$

basit kesirlere ayrılır. uygun düzenlemeler yapılırsa

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = A(x^5 + 5x^4 + (4A+C)x^3 + (4B+D)x^2 + (4A+2C+E)x + (4B+2D+F))$$

olur. $A=1, B=-1, C=0, D=0, E=4, F=0$ bulunur.

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} dx &= \int \frac{x-1}{x^2+2} dx + \int \frac{4x dx}{(x^2+2)^3} = \int \frac{x dx}{x^2+2} - \int \frac{dx}{x^2+2} + \int \frac{4x dx}{(x^2+2)^3} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2+2| - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C \end{aligned}$$

Rasyonel olmayan fonksiyonların Rasyonel Hale Getirilmesiyle İntegralinin Alınması:

Örnek: 1) $\int f(x) dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$, $u^2 = x+1 \Rightarrow 2u du = dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2u}{(u^2-1)u} du = \int \frac{2}{u^2-1} du = \int \frac{1}{u-1} du - \frac{1}{u+1} du = \\ &= \ln|u-1| - \ln|u+1| + C = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C \end{aligned}$$

2) $\int \sqrt{1+e^x} dx = ?$ $u^2 = 1+e^x \Rightarrow 2u du = e^x dx$, $e^x = u^2 - 1$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+e^x} dx &= \int u \cdot \frac{2u}{u^2-1} du = \int \frac{2u^2}{u^2-1} du = \int \left[2 + \frac{2}{u^2-1} \right] du = \int \left[2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right] du \\ &= 2 \int du + \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u+1} = 2u + \ln|u-1| - \ln|u+1| + C \\ &= 2\sqrt{e^x+1} + \ln|\sqrt{e^x+1}-1| - \ln|\sqrt{e^x+1}+1| + C = 2\sqrt{e^x+1} + \ln \left| \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} \right| + C \end{aligned}$$

3) $\int \frac{x}{x-x^{4/3}} dx = ?$ $x = u^3$, $x^{4/3} = (u^3)^{4/3} = u^4$, $dx = 3u^2 du$,

$$\int \frac{x}{x-x^{4/3}} dx = \int \frac{u^3}{u^3-u^4} 3u^2 du = 3 \int \frac{u^5}{u^3-u^4} du = 3 \int \frac{u^2}{1-u} du$$

$$= 3 \int \left(-4 - 1 + \frac{1}{1-u} \right) du = 3 \int \left(-\frac{u^3}{2} - 4 - \ln|1-u| \right) du =$$

$$= -\frac{3}{2} x^{2/3} - 3x^{1/3} - 3 \ln|1-x^{1/3}| + C$$

Rasyonel Trigonometrik fonksiyonların integrali

$R(\sin x, \cos x)$, değişkenleri $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları olan bir rasyonel fonksiyon olur. Eğer daha önce verilen yöntemler ile bu fonksiyonun integrali hesaplanamaz ise aşağıdaki özel değişken değişimi yapılarak integral rasyonel bir fonksiyonun integraline dönüşür. Kullanacağımız bazı özellikleri hatırlayalım.

$$\tan x = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \text{yazılır. } t = \tan \frac{x}{2} \text{ denirse,}$$

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{olur. Bunu kullanarak} \quad \begin{array}{c} (t^2+1) \\ \text{---} \\ x \quad 1-t^2 \end{array} \quad \sqrt{(1-t^2)^2 + (2t)^2} = (t^2+1) \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad x = \arctan \frac{2t}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{aligned}$$

Rasyonel bir trigonometrik fonksiyonu $R(\sin x, \cos x)$ ile göstermiştik.

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} \quad \text{olarak yazılır.}$$

Örnek: 1) $\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx = ? \quad t = \tan \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$

$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx = \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2+1-t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} dt =$$

$$= \int \frac{-1-t^2+1+t^2}{1+t^2} dt = \int \left[(-1) + \frac{2}{1+t^2}\right] dt = -t + 2 \arctan t + C = -\tan \frac{x}{2} + 2 \arctan\left(\tan \frac{x}{2}\right) + C = x - \tan \frac{x}{2} + C$$

2) $\int \frac{dx}{\sin 2x + \tan 2x} dx = ? \quad u = 2x \Rightarrow du = 2dx$

$$\int \frac{dx}{\sin 2x + \tan 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sin u + \tan u}, \quad t = \tan \frac{u}{2}, \quad du = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin u = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan u = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{\sin u + \tan u} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2t}{1-t^2}} =$$

$$= \int \frac{1-t^2}{2t(1-t^2) + 2t(1+t^2)} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1-t^2}{t} dt = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{4} \int t dt$$

$$= \frac{1}{4} \ln|t| - \frac{1}{8} t^2 + C = \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{u}{2} \right| - \frac{1}{8} \tan^2 \frac{u}{2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin 2x + \tan 2x} = \frac{1}{4} \ln |\tan x| - \frac{1}{8} \tan^2 x + C \quad \text{bur.}$$