

6. BÖLÜM BELİRLİ İNTEGRAL (RIEMANN İNTEGRALI)

Üçgen, dikdörtgen, yamuk gibi düzlemsel bölgelerin alanlarını hesaplamak için alan formülleri kullanılır. Ancak bölgenin sınırları doğru parçalarından oluşmaması yani bölge eğrisel bir bölge ise bu durumla belirli integral kullanılarak alan hesaplanır.

Bu bölümde reel eksenin kapalı ve sınırlı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonların Riemann (Belirli) integrali tanıtılacak ve bazı uygulamalarından söz edilecektir.

6.1. Temel Tanımlar ve Sonuçlar

Tanımlar 6.1.1. $a, b \in \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ koşulunu

sağlayan her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sonlu alt kümesine, $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı (ağı, bölünüşü) denir. $k=1, 2, \dots, n$ olmak üzere $[x_{k-1}, x_k]$ aralığına, $[a, b]$ nin P parçalanışına göre kapalı alt aralıkları, x_k , $k=1, 2, \dots, n$ noktalarına parçalanış noktaları denir. (veya bölüm nokta.) $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının uzunluğu (ölçüsü) denir.

$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ sayılarının en büyüğüne P parçalanışının normu denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. $\|P\| = \max \{ \Delta x_k; k=1, 2, \dots, n \}$ dir. Eğer

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$ ise yani $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$, $k=1, 2, \dots, n$ ise P ye $[a, b]$ nin düzgün parçalanışı denir.

Tanım: $[a, b]$ aralığının iki parçalanışı P_1, P_2 olsun. $P_1 \subset P_2$ ise P_2 ye P_1 in inceletilmişisi denir. $[a, b]$ aralığının P_1, P_2, P_3 ağları arasında $P_1 \cup P_2 \subset P_3$ ise P_3 ağına P_1 ile P_2 nin ortak inceletilmişisi denir. $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots \subset P_n \subset \dots$ koşulunu sağlayan $\{P_n\}$ dizisine inceleme dizisi denir.

Örnek: $n=8$ olduğuna göre $[1, 2]$ aralığının düzgün parçalanışını

yazınız.

Çözüm: $\frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8}$,

$P = \{1, 1\frac{1}{8}, 1\frac{2}{8}, 1\frac{3}{8}, 1\frac{4}{8}, 1\frac{5}{8}, 1\frac{6}{8}, 1\frac{7}{8}, 2\}$ olur.

Örnek: $P_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$ $P_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$

$[0, 1]$ aralığının iki parçalanışısıdır. $P_1 \subset P_2$ dir. Yani P_2 , P_1 in inceletilmişisidir.

$\|P_1\| = \frac{1}{2}$, $\|P_2\| = \frac{1}{4}$ dir.

Kolayca görüldü ki $[a, b]$ aralığının P_2 parçalanışı, P_1 in inceletilmişisi ise $\|P_2\| \leq \|P_1\|$ dir.

parçalanış inceltilse parçalanıştaki noktaların sayısı artarken, parçalanışın normu küçülür.

Riemann Alt ve Üst Toplamları

Tanım. $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a,b]$ aralığının bir P parçalanışı, $[a,b]$ yi $[x_{k-1}, x_k]$ gibi, kapalı alt aralıklara ayırmış olsun. $k=1,2,\dots,n$ için

$$m_k = m_k(f) = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$M_k = M_k(f) = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

olsun. $[x_{k-1}, x_k]$ nin uzunluğu Δx_k olduğuna göre,

$$A(f, P) = m_1 \cdot \Delta x_1 + m_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + m_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k$$

toplamına, P parçalanışına göre f nin alt Riemann (Darboux) toplamı, denir.

$$U(f, P) = M_1 \cdot \Delta x_1 + M_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + M_n \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k$$

toplamına da P parçalanışına göre f nin üst Riemann (Darboux) toplamı denir. $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından alınan herhangi bir nokta olmak üzere

$$R(f, P) = f(t_1) \cdot \Delta x_1 + f(t_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(t_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \Delta x_k$$

toplamına da, P ağına göre f nin Riemann toplamı denir.

$\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sıralı n li'sini t ile göstereceğiz.

Not: 1) $A(f, P)$, $U(f, P)$ toplamları sadece P parçalanışına bağlıdır. $R(f, P)$ toplamı hem P ye hem de $t = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ n li'sinin seçimine bağlıdır. Buna göre $R(f, P)$ toplamı çoğu kez $R(f, P, t)$ ile gösterilir. (P, t) ye işaretlenmiş parçalanış denir.

2) Sınırlı bir $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $[a,b]$ nin herhangi işaretlenmiş (P, t) parçalanışı verilsin. Her $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ için

$$m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$$

olduğundan

$$A(f, P) \leq R(f, P) \leq U(f, P)$$

olacağı açıktır.

Teorem 6.1.1. P ve P_0 $[a,b]$ aralığının iki parçalanışı ve $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olsun. ($f \in \mathcal{B}[a,b]$) Eğer $P_0 \subset P$ ise

$$A(f, P_0) \leq A(f, P) \text{ ve } U(f, P) \leq U(f, P_0)$$

dır.

İspat: İspatı önce aşağıdaki özel durum için yapıp, sonra genelleştirelim.

$P_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n\}$, $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x^*, x_k, \dots, x_n\}$ olsun. $P_0 \subset P$ olduğu açıktır. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı için

$$m_k = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \}, M_k = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

olduğunu biliyoruz.

$$m_k' = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x^*] \}, \quad m_k'' = \inf \{ f(x) \mid x \in [x^*, x_k] \}$$

$$M_k' = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x^*] \}, \quad M_k'' = \sup \{ f(x) \mid x \in [x^*, x_k] \}$$

olsun. $A \subset B$ ise $\sup A \leq \sup B$, $\inf A \geq \inf B$ özellikleri kullanılırsa

$$m_k \leq m_k' \text{ ve } m_k \leq m_k''; \quad M_k' \leq M_k \text{ ve } M_k'' \leq M_k$$

yazılır.

$$\begin{aligned} A(f, P) &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot \Delta x_i + m_k' (x^* - x_{k-1}) + m_k'' (x_k - x^*) + \sum_{i=k+1}^n m_i \cdot \Delta x_i \geq \\ &\geq \sum_{i=1}^{k-1} m_i \cdot \Delta x_i + m_k (x^* - x_{k-1}) + m_k (x_k - x^*) + \sum_{i=k+1}^n m_i \cdot \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i = A(f, P_0) \end{aligned}$$

$A(f, P) \geq A(f, P_0)$ elde edilir. Aynı yoldan $\bar{U}(f, P) \leq \bar{U}(f, P_0)$ olduğu ispat edilebilir. (Alıştırma olarak siz yapınız.)

Şimdi de P 'nin P_0 dan r tane fazla noktası olsun. Bu noktalar sırasıyla $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ olsun. Bu noktaları P_0 ağına teker teker katarak,

$$P_0 = P_0, \quad P_1 = P_0 \cup \{x_1^*\}, \quad P_2 = P_1 \cup \{x_2^*\}, \quad \dots, \quad P_r = P_{r-1} \cup \{x_r^*\}$$

parçalanışlarını oluşturalım. Buradan $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P$ yazılır.

Yukarıdaki izlenen yol her parçalanış için tekrarlanırsa

$$A(f, P_0) \leq A(f, P_1), \quad A(f, P_1) \leq A(f, P_2), \quad \dots, \quad A(f, P_{r-1}) \leq A(f, P)$$

yazılır. Böylece

$$A(f, P_0) \leq A(f, P)$$

bulunmuş olur. Aynı yoldan $\bar{U}(f, P) \leq \bar{U}(f, P_0)$ olduğu ispatlanır.

6.1.2. Teorem: P_1 ve P_2 $[a, b]$ aralığının herhangi iki parçalanışı ve $f \in B[a, b]$ olsun. O zaman

$$A(f, P_1) \leq \bar{U}(f, P_2) \text{ dir.}$$

İspat: $P^* = P_1 \cup P_2$ olsun. Teorem 6.1.1. den

$$A(f, P_1) \leq A(f, P^*) \leq \bar{U}(f, P^*) \leq \bar{U}(f, P_2)$$

$$A(f, P_1) \leq \bar{U}(f, P_2) \text{ bulunur.}$$

Sonuç: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$m(f) = \inf \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}, \quad M(f) = \sup \{ f(x) \mid x \in [a, b] \} \text{ olsun.}$$

Bu durumda $[a, b]$ nin her P parçalanışı için

$$m(f) \cdot (b-a) \leq A(f, P) \leq \bar{U}(f, P) \leq M(f) \cdot (b-a)$$

İspat: Her $k=1, 2, \dots, n$ için $m_k(f) \geq m(f)$, $M_k(f) \leq M(f)$ olduğundan

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k \geq \sum_{k=1}^n m(f) \Delta x_k = m(f) \cdot [(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1})]$$

$$= m(f) \cdot (x_n - x_0) = m(f) \cdot (b-a) \Rightarrow m(f) \cdot (b-a) \leq A(f, P)$$

Aynı şekilde $\bar{U}(f, P) \leq M(f) \cdot (b-a)$ bulunur.

Sonuç: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve (P_n) de $[a,b]$ nin bir incelleme dizisi olsun. (Yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_{n+1} \subset P_n$) o zaman $(A(f, P_n))$ alt toplamlar dizisi monoton artan ve üstten sınırlı bir dizedir. $(\bar{U}(f, P_n))$ üst toplamlar dizisi monoton azalan ve alttan sınırlı bir dizedir.

İspat: Teorem 6.1.1 e göre $P_k \subset P_{k+1}$ olduğundan

$$A(f, P_k) \leq A(f, P_{k+1}), \quad \bar{U}(f, P_{k+1}) \leq \bar{U}(f, P_k)$$

yazılır. Buna göre $(A(f, P_n))$ monoton azalan, $(\bar{U}(f, P_n))$ monoton artandır. Sonuca göre

$$A(f, P_n) \leq m(b-a), \quad m(b-a) \leq \bar{U}(f, P_n)$$

olduğundan $(A(f, P_n))$ üstten sınırlı, $(\bar{U}(f, P_n))$ alttan sınırlıdır. o halde bu dizilerin limitleri vardır.

Tanım: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon olsun. $[a,b]$ aralığına alt (P_n) inceltilmiş dizisi gözönüne alınsın. $(A(f, P_n))$ dizisinin limitine f nin $[a,b]$ deki alt integrali, $(\bar{U}(f, P_n))$ dizisinin limitine de f nin $[a,b]$ aralığındaki üst integrali denir. ve

$$I = \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P_n) = \sup \{ A(f, P_n) \mid n \in \mathbb{N} \} \quad (n \rightarrow \infty \text{ iken } \|P_n\| \rightarrow 0)$$

$$\bar{I} = \int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{U}(f, P_n) = \inf \{ \bar{U}(f, P_n) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

yazılır.

Teorem 6.1.1 den $I \leq \bar{I}$ $\left(\int_a^b f \leq \int_a^b f \right)$ dir.

Tanım: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyon, (P, t) $[a,b]$ nin işaretlenmiş parçalanışı olsun. Eğer

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k = I \quad 6.1.$$

sonlu limiti varsa bu limite f nin $[a,b]$ üzerinde Riemann integrali (veya Belirli integrali) denir ve $\int_a^b f(x) dx$ ile gösterilir. Bu durumda $f, [a,b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir denir ve $f \in R[a,b]$ ile gösterilir. a ve b sayılarına sırasıyla integralin alt ve üst sınırları denir. 6.1. eşitliği şu anlamdadır!

$$I = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: [a,b] \text{ nin } \|P\| < \delta \text{ koşulunu sağlayan her işaretlenmiş } (P, t) \text{ parçalanışı için } |R(f, P, t) - I| < \varepsilon \text{ olmasıdır.}$$

Teorem 6.1.3: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı ve $\forall x \in [a,b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ ise

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$$

dir. İspat: Aritmetik

Tanım: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı ve $\int_a^b f = \int_a^b f$ ise f fonksiyonun

$[a,b]$ aralığında integrallenebilir denir. ve $\int_a^b f = \int_a^b f = \int_a^b f$ yazılır.

Örnek 1.1) $f(x) = x^2$ ile verilen f fonksiyonunun, $[1,2]$ aralığında integ-
rallenebileceğini gösteriniz.

Çözüm: $[1,2]$ aralığının, $P_n = \{1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, \dots, 2\}$ düzgün parçalanışını
alalım. Buradan $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n = \frac{1}{n}$, $\|P\| = \frac{1}{n}$ dir.

f , $[1,2]$ aralığında artan olduğundan

$$m_1 = 1^2 = 1$$

$$M_1 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$m_2 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$M_2 = \left(\frac{n+2}{n}\right)^2$$

$$m_3 = \left(\frac{n+2}{n}\right)^2$$

— — —

$$m_n = \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2$$

$$M_n = \left(\frac{2n}{n}\right)^2$$

$$A(f, P_n) = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{n}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n-1}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{6} \cdot (2 - \frac{1}{n})(7 - \frac{1}{n})$$

$$U(f, P_n) = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2n}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{6} (2 + \frac{1}{n})(7 + \frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P_n) = \frac{7}{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U(f, P_n) = \frac{7}{3}$$

$$\text{olur. Böylece } \underline{I} = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3} = \overline{\int_1^2 x^2 dx} = \overline{I} \text{ dir.}$$

Örnek 2. $D: [a,b] \rightarrow \{0,1\}$, $D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel} \\ 0, & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$

ile verilmiş Dirichlet fonksiyonu $[a,b]$ de sınırlıdır fakat
integrelenemez değildir.

Çözüm: $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ için $t'_k \in [x_{k-1}, x_k]$ rasyonel sayıları
 $t''_k \in [x_{k-1}, x_k]$ irrasyonel sayıları gösterin.

$$R(D, P, t') = \sum_{k=1}^n D(t'_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a$$

$$R(D, P, t'') = \sum_{k=1}^n D(t''_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

$b-a \neq 0$ olduğundan $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(D, P, t)$ limiti mevcut değildir.

Dolayısıyla $D(x)$ fonk. int. b'ilir değildir.

Alt ve Üst Riemann integrali tanımı şu şekilde de verilir:

Tanım: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı, P , $[a,b]$ nin bütün P parçalanışlarından oluşan küme, $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ olsun.

Her $p \in P$ için $A(f, p) \leq m(f) \cdot (b-a)$ olduğundan $\{A(f, p) : p \in P\}$ kümesi üstten sınırlıdır. $U(f, p) \geq M(f) \cdot (b-a)$ olduğundan $\{U(f, p) : p \in P\}$ kümesi alttan sınırlıdır. O halde sırasıyla \sup ve \inf vardır.

$$\boxed{I = \sup \{A(f, p) : p \in P\}}, \quad \boxed{\bar{I} = \inf \{U(f, p) : p \in P\}}$$

sayılarına f nin $[a,b]$ üzerindeki sırası ile alt integrali ve üst integrali denir.

Teorem: $f \in B[a,b]$ olsun. $f \in R[a,b]$ dir \Leftrightarrow verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $[a,b]$ aralığının

$$U(f, p_\varepsilon) - A(f, p_\varepsilon) < \varepsilon$$

olarak şekilde bir p_ε parçalanışı vardır.

İspat: " \Rightarrow ": $f \in R[a,b]$ olsun. $I = \underline{I} = \bar{I}$ dir. $\forall \varepsilon > 0$ için :

$$\underline{I} = \sup \{A(f, p) : p \in P\} \Rightarrow A(f, p_1) > \underline{I} - \varepsilon/2$$

$$\bar{I} = \inf \{U(f, p) : p \in P\} \Rightarrow U(f, p_2) < \bar{I} + \varepsilon/2 \quad \text{ö.z. } p_1, p_2 \in P \text{ parçalanışları vardır.}$$

$p_\varepsilon = p_1 \cup p_2$ denirse, $p_1 \subset p_\varepsilon$, $p_2 \subset p_\varepsilon$ olduğundan

$$A(f, p_2) \leq A(f, p_\varepsilon) \leq U(f, p_\varepsilon) \leq U(f, p_1)$$

olur. Böylece

$$\underline{I} - \frac{\varepsilon}{2} < A(f, p_2) \leq A(f, p_\varepsilon) \leq U(f, p_\varepsilon) \leq U(f, p_1) < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. $f \in R[a,b]$ old. $I = \underline{I} = \bar{I}$ dir. $\Rightarrow U(f, p_\varepsilon) - A(f, p_\varepsilon) < \varepsilon$ bulunur.

" \Leftarrow ": $\forall \varepsilon > 0$, $\exists p_\varepsilon \in P$: $U(f, p_\varepsilon) - A(f, p_\varepsilon) < \varepsilon$ olsun.

Alt ve Üst Riemann integrali tanımı gereği

$$A(f, p_\varepsilon) < \underline{I} \leq \bar{I} \leq U(f, p_\varepsilon)$$

dir. Dolayısıyla

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} < U(f, p_\varepsilon) - A(f, p_\varepsilon) < \varepsilon \Rightarrow 0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$$

olur, $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\underline{I} = \bar{I}$ bulunur. $\Rightarrow f \in R[a,b]$ dir.