

6.2. İntegrallenebilen Bazı Fonksiyon Sınıfları ve Riemann İntegralinin Özellikleri

Aşağıda vereceğimiz teoremlerde "Hangi fonksiyonların integraleri vardır?" sorusunun cevabı verilmektedir.

6.2.1. Teorem: Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise

f , $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir - Yani $f \in R[a, b] \subset \mathbb{R}[a, b]$ dir.
İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ise her bir $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında düzgün sürekli'dir. Dolayısıyla

$$m_k(f) = f(c_k), \quad c_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ ve } M_k(f) = f(d_k), \quad d_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için $|d_k - c_k| < \delta$ olduğunda

$$|f(d_k) - f(c_k)| = |M_k(f) - m_k(f)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

olarak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan $[a, b]$ aralığının her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\|P\| < \delta$ ve $|M_k - m_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ olarak şekildeki bir P parçalanışını alabiliriz. Bu parçalanış için

$$\begin{aligned} U(f; P) - A(f; P) &= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon \quad \text{olduğundan Teorem 6.1.4'e göre} \\ &\quad f \in R[a, b] \text{ dir.} \end{aligned}$$

6.2.2. Teorem: Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında monoton artan veya azalan ise f , $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir.

İspat: f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında monoton artan bir fonksiyon olsun. (monoton azalan olması durumunda aynı ispat yapılır.)

Bu durumda $f(a) \neq f(b)$ olacağından $f(b) - f(a) > 0$ olur. Herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için $[a, b]$ aralığının $\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ özelliğindeki bir

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışını gözönüne alalım. f artan olduğundan

$$m_k = \inf \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \} = f(x_{k-1})$$

$$M_k = \sup \{ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k] \} = f(x_k)$$

ve böylece

$$\begin{aligned} U(f; P) - A(f; P) &= \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \cdot \|P\| = \|P\| \cdot \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \\ &= \|P\| \cdot (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) \\ &= \|P\| \cdot (f(x_n) - f(x_0)) = \|P\| \cdot (f(b) - f(a)) \\ &< \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon \quad \Rightarrow \text{6.1.4. Teo. gereği } f \in R[a, b] \text{ dir.} \end{aligned}$$

İspatsız olarak verdiğimiz aşağıdaki teorem bir fonksiyonun verilen bir aralıkta integrallenebilir olması için başka bir koşuldur.

6.2.3-Teorem: Sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip sınırlı fonksiyon bu aralıkta integrallenebilir.

Not: 1) Bazı sürekli olmayan fonksiyonlar da integrallenebilir. Bu tip fonksiyonların integralleri daha ilerde derste ele alınacaktır.

2) Monoton fonksiyonların sürekli, sürekli fonksiyonların da monoton olmaları gerekmez.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ 1, & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases} \quad \text{fonksiyonu monotondur fakat sürekli değildir.}$$

$$g(x) = \left| x - \frac{a+b}{2} \right| \quad \text{sürekli fakat monoton değildir.}$$

3) Yukarıda verilen teoremler dikkate alındığında,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad g(x) = \lfloor x \rfloor$$

fonksiyonları sırasıyla sürekli ve monoton fonksiyonlar olduklarından integrallenebilir.

Örnek: $f_1(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x^2, & x \in [1,2] \end{cases}$

$$f_2(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1] \\ x+1, & x \in [1,2] \\ x^3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

$$f_3(x) = \frac{\sin \pi(1-x)}{1-x}, \quad x \in [0,1]$$

fonksiyonlarının integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Gözüm: f_1 fonksiyonu $[0,2]$ aralığında sürekli olduğundan

6.2.1. Teoreme göre int. bilirdir.

f_2 fonksiyonu $[0,3]$ de monoton olduğundan int. bilirdir.

f_3 fonksiyonu $x=1$ noktası dışında sürekli. Sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip old. 6.2.3. Teo. göre int. bilirdir.

6.2.4 Teorem: $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$[a,b]$ nin herhangi P parçalanışı olsun. Bu durumda

$$\bar{U}(f,P) - A(f,P) = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \quad \text{dir. Burada } \omega_k(f) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : x,y \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

İspat: $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ ve $Z = \{z = x - y : x \in X, y \in Y\}$ kümeleri için

$\sup Z = \sup X - \inf Y$ olduğundan

$$M_k(f) - m_k(f) = \sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \} - \inf \{ f(y) : y \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$= \sup \{ f(x) - f(y) : x,y \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$= \sup \{ |f(x) - f(y)| : x,y \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

yazılabilir. Buradan $\sum_{k=1}^n (M_k(f) - m_k(f)) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \cdot \Delta x_k \Rightarrow$

$$\bar{U}(f,P) - A(f,P) = \sum_{k=1}^n \omega_k(f) \Delta x_k \quad \text{bulunur.}$$

Şimdi Riemann (belirli) integralin özellikleri verilecektir.

6.2.5. Teorem: $f, g \in R[a, b]$ olsun. Bu durumda

(1) $f+g \in R[a, b]$ dir.

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda f \in R[a, b]$

(3) $|f| \in R[a, b]$

(4) $f \cdot g \in R[a, b]$

(5) $\forall x \in [a, b]$ için $|f(x)| \geq \beta > 0$ ise $\frac{1}{f} \in R[a, b]$ dir.

İspat: (1) $F = f+g$ olsun. $f, g \in R[a, b]$ olduğundan 6.1.4. Teo. gereği

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $[a, b]$ nin $\|P\| < \delta$ özelliğindeki her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışı için

$$U(f, P) - A(f, P) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(g, P) - A(g, P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} U(F, P) - A(F, P) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f+g) - m_k(f+g)] \Delta x_k \\ &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k + \sum_{k=1}^n [M_k(g) - m_k(g)] \Delta x_k \\ &= U(f, P) - A(f, P) + U(g, P) - A(g, P) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur ki bu ise $F = f+g \in R[a, b]$ demektir.

2) öğrenciye alıştırma olarak bırakıldı

3) $\varepsilon > 0$ verilsin. $f \in R[a, b]$ olduğundan $[a, b]$ aralığının

$U(f, P_\varepsilon) - A(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$ özelliğindeki P_ε parçalanışı vardır.

$P_\varepsilon = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ olsun. $k=1, 2, \dots, n$ ve $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ için

$$|f|(x) - |f|(y) = |f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_k(f) - m_k(f)$$

dir. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki x ler için supremum, $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki y ler için infimum alınırda, $k=1, 2, \dots, n$ için

$$M_k(|f|) - m_k(|f|) \leq M_k(f) - m_k(f)$$

eşitsizliği bulunur. Her iki yan $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ ile çarpılıp,

toplam alınırda,

$$\sum_{k=1}^n M_k(|f|) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k(|f|) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k$$

$$U(|f|, P) - A(|f|, P) \leq U(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $|f|$ nin integrallenebilir olduğunu gösterir.

(4) $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$, $[a, b]$ aralığının herhangi parçasını? olmak üzere $k = 1, 2, \dots, n$ ve $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ için

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(y) &= f(x)[g(x) - g(y)] + [f(x) - f(y)]g(y) \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq M(|f|) \cdot [M_k(g) - m_k(g)] + M(|g|) [M_k(f) - m_k(f)] \end{aligned}$$

yazılır. Eğer $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki x noktaları üzerinden supremum ve $[x_{k-1}, x_k]$ aralığındaki y noktaları üzerinden infimum alınırsa,

$$M_k(f \cdot g) - m_k(f \cdot g) \leq M(|f|) [M_k(g) - m_k(g)] + M(|g|) [M_k(f) - m_k(f)]$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki yanını $(x_k - x_{k-1}) = \Delta x_k$ ile çarpılır ve $k = 1, 2, \dots, n$ için toplam alınır ise

$$\begin{aligned} U(f \cdot g, P) - A(f \cdot g, P) &\leq M(|f|) [U(g, P) - A(g, P)] + M(|g|) \cdot [U(f, P) - A(f, P)] \\ &< [M(|f|) + M(|g|)] \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. ε sayısı keyfî olduğundan $f \cdot g$ integrallenebilir.

5) $\beta > 0$, her $x \in [a, b]$ için $|g(x)| \geq \beta$ özelliğindeki bir sayı olsun. Herhangi $k = 1, 2, \dots, n$ ve $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ için

$$\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)} = \frac{g(y) - g(x)}{g(x) \cdot g(y)} \leq \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leq \frac{1}{\beta^2} \cdot [M_k(g) - m_k(g)]$$

olur. $x \in [x_{k-1}, x_k]$ için supremum, $y \in [x_{k-1}, x_k]$ için inf. alınırsa

$$M_k\left(\frac{1}{g}\right) - m_k\left(\frac{1}{g}\right) \leq \frac{1}{\beta^2} \cdot [M_k(g) - m_k(g)]$$

bulunur. Dolayısıyla her iki yan Δx_k ile çarpılır, $k = 1, \dots, n$ için toplanırsa

$$U\left(\frac{1}{g}, P\right) - A\left(\frac{1}{g}, P\right) \leq \frac{1}{\beta^2} \cdot [U(g, P) - A(g, P)] < \frac{\varepsilon}{\beta^2}$$

ve $\varepsilon > 0$ keyfî olduğundan (β sabit) $\frac{1}{g} \in R[a, b]$ dir.

Tanım: $f \in R[a,b]$ için $\int_a^a f(x)dx = 0$ ve $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ dir.

6.2.6. Teorem: 1) $f \in R[a,b]$, $g \in R[a,b]$ için $f+g \in R[a,b]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \in R[a,b]$ olup

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \text{ ve } \int_a^b (\alpha f)(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx$$

esitlikleri doğrudur.

- 2) $f \in R[a,b]$ ve $a < c < b$ ise $f \in R[a,c]$, ve $f \in R[c,b]$ olup,
 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (Riemann int'nin toplamsallık özelliği)
- 3) $f \in R[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ dir.
- 4) $f \in R[a,b]$, $g \in R[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) \leq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ dir.
- 5) $f \in R[a,b]$ ve $\forall x \in [a,b]$ için $q \leq f(x) \leq p$ ise
 $q \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq p \cdot (b-a)$
 dir.
- 6) $f \in R[a,b]$ ise $|f| \in R[a,b]$ olup
 $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
 dir.

İspat: 1) $f, g \in R[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f+g \in R[a,b]$ ve $\alpha f \in R[a,b]$ olduğu 6.2.4. Teorem de gösterildi.

$[a,b]$ aralığının i'şaretleme'li (P, t) parçalanması için

$$R(f+g, P, t) = R(f, P, t) + R(g, P, t)$$

yazılabilir. Çünkü, $\sum_{k=1}^n (f+g)(t_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n g(t_k) \Delta x_k$ dir.

$f, g \in R[a,b]$ olduğundan

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) = \int_a^b f(x)dx, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(g, P, t) = \int_a^b g(x)dx$$

limitleri mevcut olup,

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f+g, P, t) \text{ limiti vardır ve } \int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

yazılır.

Diğer eşitliğin doğruluğu da benzer şekilde gösterilir.

2) $[a,b]$ aralığı $[a,c]$ ve $[c,b]$ gibi iki alt aralığa bölünerek f fonksiyonunun bu alt aralıklarda da int.bilir olduğunu görelim:

$$P_n = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = c\} \text{ ve } P_m = \{c = x_n, x_{n+1}, \dots, x_m = b\}$$

Kümeleri bu alt aralıkların bir parçalanması olsun. $P = P_n \cup P_m$,

$[a,b]$ aralığının bir parçalanmasıdır ve $P_n, P_m \subset P$ olduğundan

$$\|P_n\| \leq \|P\| \text{ ve } \|P_m\| \leq \|P\|$$

dir. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olduğundan

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{n+m} f(t_k) \Delta x_k = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=n+1}^m f(t_k) \Delta x_k$$

$$= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=n+1}^m f(t_k) \Delta x_k$$

olarak ifade edilir. $f \in R[a, c]$ ve $f \in R[c, b]$ olduğundan

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k = \int_a^c f(x) dx, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=n+1}^m f(t_k) \Delta x_k = \int_c^b f(x) dx$$

dir. o halde $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ bulunur.

3) $[a, b]$ aralığının işaretlenmiş (P, t) parçalanışı için

$$f(t_k) \geq 0, \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0 \text{ olduğundan}$$

$$R(f, P, t) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k \geq 0 \text{ yazılır. Bu durumda}$$

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) = \int_a^b f(x) dx = I \geq 0 \text{ olduğunu görelim. Aksi halde}$$

$I < 0$ olsa $\varepsilon = |I| > 0$ olur. Limit tanımına göre $\exists \delta > 0$:

$\|P\| < \delta$ olan $[a, b]$ nin işaretlenmiş (P', t') parçalanışı için

$|R(f, P', t') - I| < |I| = \varepsilon \Rightarrow R(f, P', t') < I + |I| = 0$ olur. Bu ise $[a, b]$ nin işaretlenmiş her (P, t) parçalanışı için $R(f, P, t) \geq 0$ olması ile çelişir. Yani $I \geq 0$ dur.

4) $f \in R[a, b]$, $g \in R[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq g(x)$ olsun.
 $\psi(x) = g(x) - f(x)$ için $\psi \in R[a, b]$ dir. $\psi(x) \geq 0$ old. (3) e göre
 $\int_a^b \psi(x) dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$ elde edilir.

5) $[a, b]$ nin işaretlenmiş (P, t) parçalanışı için $\Delta x_k > 0$, $k=1, 2, \dots, n$ için
 $q \cdot \Delta x_k \leq f(t_k) \cdot \Delta x_k \leq p \cdot \Delta x_k$ ve $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b-a$ olduğundan
 $q \cdot (b-a) \leq R(f, P, t) \leq p \cdot (b-a)$ bulunur. $\|P\| \rightarrow 0$ iken limit alınırsa
 $q \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq p \cdot (b-a)$ bulunur.

6) $|f| \in R[a, b]$ olduğu gösterildi. $\forall x \in [a, b]$ için

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad -|f|, |f| \in R[a, b] \text{ old. (4) e göre}$$

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow$$

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \text{ demektir.}$$