6.3. İntegral Hesabın Temel Teoremleri

6.3.1. Teorem: (İntegral için Ortalama Değer Teoremi)
f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = f(c).(b-a)}$$

olacak biçimde en az bir $c\in[a,b]$ vardır.

İspat: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan bu aralıkta sınırlıdır, dolayısıyla

$$m=\inf\{f(x): x\in[a,b]\},\quad M=\sup\{f(x): x\in[a,b]\}$$

olmak üzere her $x\in[a,b]$ için $m\le f(x)\le M$ dir. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olduğundan

$$m.(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M.(b-a)$$

yazılır, buradan da

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\le M$$

bulunur. f, $[a,b]$ de sürekli olduğundan ara değer teoremine göre

$$f(c)=\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx=f(c).(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $c\in[a,b]$ vardır.

Not: $f\in R[a,b]$ ise $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ sayısına f nin $[a,b]$ aralığındaki ortalama değeri denir.

Örnek: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında dikkate alınırsa, bu fonksiyonun grafiği, yarıçapı 2 olan orjin merkezli çemberin üst yarısı olduğundan

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=2\pi$$

dır. Dolayısıyla f nin $[-2,2]$ deki ortalama değeri

$$f(c)=\frac{\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx}{2-(-2)}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$$

olur.

Önceki kısımlarda görüldüğü gibi belirli integral hesaplama aslında bir limit hesaplamadır. Ancak bu limiti hesaplamak oldukça uğraştırıcı ve zordur. Bu kısımda, her defasında limit hesaplamadan, f nin belirsiz integrali olan F fonksiyonundan yararlanarak belirli integral alma yöntemleri görülecektir.

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon ise her $x \in [a,b]$ için

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonu iyi tanımlıdır, yani F, $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyondur,

$$F: [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(değişken üslü integral)}$$

dır.

6.3.2. Teorem (İntegral Hesabın Birinci Temel Teoremi). Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve F fonksiyonu $[a,b]$ aralığında

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

olarak tanımlanmış bir fonksiyon ise F, $[a,b]$ de türevlenebilirdir ve her $x \in [a,b]$ için $F'(x) = f(x)$ dir.

__İspat:__ $h > 0$ olmak üzere

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

olduğundan

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

olur. İntegral için ortalama değer teoremi gereği

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = h \cdot f(c)$$

olacak biçimde en az bir $c \in [x, x+h]$ sayısı vardır. Dolayısıyla

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$$

olur. $h \to 0$ iken $c \to x$ olacağından

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{c \to x} f(c)$$

yazılır. f sürekli olduğundan $\lim_{c \to x} f(c) = f(x)$ olur, yani limit vardır ve değeri $f(x)$ dir. Dolayısıyla F fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevlenebilirdir ve her $x \in [a,b]$ için

$$F'(x) = f(x)$$

dır.

6.3.3. Teorem (İntegral Hesabın İkinci Temel Teoremi)

Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli, $[a,b]$ aralığında $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ olmak üzere F fonksiyonu bu aralıkta türevlenebilir ve her $x\in[a,b]$ için $F'(x)=f(x)$ ise

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

dır.

İspat: $P=\{x_0=a, x_1, x_2, \ldots, x_n=b\}$ kümesi $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı olsun. F fonksiyonu $[a,b]$ aralığında türevli olduğundan bu aralıkta süreklidir. F fonksiyonuna $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığında türevler için bilinen ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$F(x_k)-F(x_{k-1}) = F'(t_k).\Delta x_k \quad , \quad t_k\in[x_{k-1},x_k]$$

yazılır. $F'(t_k)=f(t_k)$ olduğundan $f(t_k).\Delta x_k = F(x_k)-F(x_{k-1})$ yazılır. Böylece

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-1})]$$
$$= F(x_n)-F(x_0) = F(b)-F(a)$$

yani, $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(t_k).\Delta x_k = F(b)-F(a)$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

bulunur. Genellikle $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b = F(x)\Big|_a^b$ gösterimleri kullanılır.

6.3.4. Teorem (Değişken Değiştirme)

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli, türevli bir fonksiyon ve $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $g([a,b])\subset[c,d]$ olsun. O halde

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

gerçeklenir.

İspat: F, f nin bir ilkel fonksiyonu olsun. $F\circ g$, $[a,b]$ üzerinde türevlidir ve

$$(F\circ g)' = (F'\circ g).g' = (f\circ g).g'$$

olur. $(f\circ g).g'$ sürekli olduğundan

$$\int_a^b f(g(x)).g'(x)dx = \int_a^b (F'\circ g)(x).g'(x)dx$$
$$= \int_a^b (F\circ g)'(x)dx =$$
$$= F(g(x))\Big|_a^b$$
$$= F(g(b))-F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

dır.

6.3.5. Teorem : (Kısmi integrasyon)

$f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ise

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

İspat: $F = f \cdot g$ sürekli türevlenebilirdir

$$f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b = F(x) \Big|_a^b = \int_a^b F'(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x) \right] dx$$

$$= \int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx + \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

veya

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

elde edilir.

Not: Bölüm 5 de verilen fonksiyonların belirsiz integralleri için verilen formüller, belirli integraller için de geçerlidir.

Örnek: 1) $F(x) = \int_a^x \sqrt{1-t^2}\,dt$, $0<t<1$ olduğuna göre $F'(x)$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm: İntegralin birinci temel teoremine göre $F'(x) = f(x)$ dır. Böylece $F'(x) = \sqrt{1-x^2}$ olur.

2) $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1+t}\,dt$, $t \geq 0$ ise $F'(x) = ?$

Çözüm: $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x$, $F(u) = \int_0^u \sqrt{1+t}\,dt$ olur. Zincir kuralına göre

$F'_x = F'_u \cdot u'_x$ olduğundan,

$F'_u = \sqrt{1+u}$, $u'_x(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\Rightarrow$ $F'_x = \sqrt{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}}$ olur.

3) (Leibniz Formülü) $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ ise

$$F'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \int_{u(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{v(x)} f(t)\,dt = \int_a^{v(x)} f(t)\,dt - \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$

$F_1(x) = \int_a^{v(x)} f(t)\,dt$, $F_2(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$

$F_1'(v) = f(v)$, $F_2'(u) = f(u)$

$F'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = F_1'(v) \cdot v'(x) - F_2'(u) \cdot u'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$

4) $F(x)=\int_a^x \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$, $t>0$ olduğuna göre, integraller için ortalama değer teoremini kullanarak, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ sayısının değerini, x_{k-1}, x_k cinsinden bulunuz.

Çözüm: integralin Ortalama değer teoremine göre
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{c_k}}\cdot(x_k - x_{k-1}) \quad \text{o.ş. } c_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ vardır.} \quad (1)$$
integral hesabın 2. temel teoreminden, $F(x)=\int_a^x \frac{dt}{\sqrt{t}}$ ise
$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = F(x_k) - F(x_{k-1}) \quad (*)$$
dır. Diğer taraftan $\sqrt{t}$ nin türevi $\frac{1}{2\sqrt{t}}$ olduğundan
$$F(t)=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{t}+c$$
belirsiz integrali bulunur. Böylece $F(x_k)-F(x_{k-1}) = 2(\sqrt{x_k}-\sqrt{x_{k-1}})$ dır. (2)

(1) ve (2) den, $2(\sqrt{x_k}-\sqrt{x_{k-1}}) = \frac{1}{\sqrt{c_k}}(x_k - x_{k-1})$
$$\Rightarrow c_k = \left(\frac{\sqrt{x_k}+\sqrt{x_{k-1}}}{2}\right)^2$$
bulunur.

---

5) $f(x)=x^2$, $c_k=\sqrt{\frac{x_k^2+x_k x_{k-1}+x_{k-1}^2}{3}}$ olduğuna göre $[0,b]$ aralığının $P_n=\{0=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b\}$ parçalanışı için
$$R(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\cdot\Delta x_k$$
Riemann toplamını bulunuz. Bunun n ye bağlı olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $f(c_k)=c_k^2 = \frac{x_k^2+x_k x_{k-1}+x_{k-1}^2}{3}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ olduğundan
$$R(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2+x_k x_{k-1}+x_{k-1}^2}{3}\cdot(x_k - x_{k-1})$$
$$=\frac{1}{3}\sum (x_k^3 - x_{k-1}^3) = \frac{1}{3}(x_n^3 - x_0^3) = \frac{1}{3}b^3 \text{ bulunur.}$$
Dolayısıyla $R(f,P_n)$ n ye bağlı değildir.

6) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon ise
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)\,dx$$
olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $[0,1]$ aralığının düzgün bir ağı
$$P_n=\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$
dır.

$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ aralığında seçeceğimiz c_k sayısı, $\frac{k}{n}$ olsun. $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ olduğundan, $[0,1]$ aralığındaki Riemann toplamı,

$$R(f,P_n) = \frac{1}{n}\left[f\left(\tfrac{1}{n}\right) + f\left(\tfrac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\tfrac{n}{n}\right)\right] \text{ dır.}$$

$$\lim_{n\to\infty} R(f,P_n) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)\,dx$

bulunur.

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}}\left[1^{15} + 2^{15} + 3^{15} + \dots + n^{15}\right] = ?$

Çözüm: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{16}}\left[1^{15} + 2^{15} + \dots + n^{15}\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{15} + \left(\frac{2}{n}\right)^{15} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^{15}\right]$

$$= \int_0^1 x^{15}\,dx$$

yazılır. Türevi x^{15} olan ifade, $\frac{1}{16}x^{16}$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{15} + \left(\frac{2}{n}\right)^{15} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^{15}\right] = \frac{1}{16}$$

bulunur.

---

8) $f(x) = \begin{cases} x & , 0 \le x < 1 \\ \sin \pi x & , 1 \le x \le 2 \end{cases}$ olarak tanımlanan f fonksiyonu verilsin.

a) $\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$ b) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ ise $F'\left(\frac{1}{2}\right) = ?$ $F'\left(\frac{3}{2}\right) = ?$

Çözüm: a) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx$

$$= \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \sin \pi x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \left[\frac{\cos \pi x}{\pi}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right] = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$$

b) $0 \le x < 1$ için $F'(x) = f(x) = x$

$1 \le x \le 2$ için $F'(x) = f(x) = \sin \pi x$ olduğundan

$F'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $F'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$ bulunur.

9) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = ?$ $\left(\begin{array}{l} x = \sin t,\ dx = \cos t\,dt \\ x=0 \Rightarrow \sin 0 = 0 \quad t=0 \\ x=1 \Rightarrow 1 = \sin t \Rightarrow t = \pi/2 \end{array}\right)$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] = \pi/4$$