

## 7. BÖLÜM RIEMANN İNTEGRALİNİN BAZI UYGULAMALARI

### 7.1. Bir Eğri Altında Kalan Alan

**Teorem 7.1.**  $[a, b]$  aralığında negatif olmayan, sürekli  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu verilsin.  $[a, b]$  aralığının bir parçalanışı  $P_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  ve  $[x_{k-1}, x_k]$  alt aralığına ait bir nokta  $t_k$  olsun.  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$  ve  $[a, b]$  aralığına ait eğri altındaki alan (yani  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $x$ -ekseni,  $y=f(x)$  ile sınırlanan bölgenin alanı)  $A_a^b$  ile gösterilsin. O zaman

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \Delta x_k = A_a^b$$

(Yani  $\int_a^b f(x) dx = A_a^b$ ) dir.

İspat:  $[x_{k-1}, x_k]$  alt aralığına ait eğri altındaki alanı  $A_k$  ile gösterelim.

$$A_a^b = \sum_{k=1}^n A_k \text{ olduğu açıktır. Ayrıca}$$

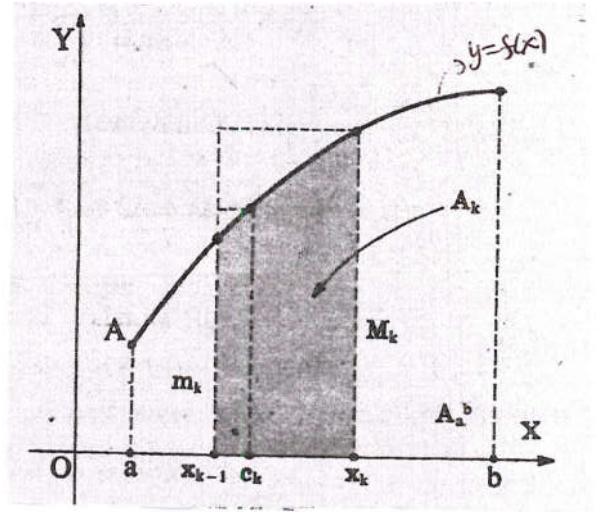
$$m_k \cdot \Delta x_k \leq A_k \leq M_k \cdot \Delta x_k$$

yazılabilir. Buradan

$$m_k = \inf \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$M_k = \sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

dir.



$$\text{Her } n \in \mathbb{N} \text{ için } A(f, P_n) \leq A_a^b \leq U(f, P_n) \quad (7.1)$$

yazılır.  $f$  fonksiyonu sürekli olduğundan, bu aralıkta integrallenebilir. O halde  $\|P_n\| \rightarrow 0$  olmak üzere,  $[a, b]$  aralığının  $(P_n)$  inceleme dizisine göre,

$$\lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} A(f, P_n) = \int_a^b f = \int_a^b f, \quad \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} U(f, P_n) = \int_a^b f = \int_a^b f$$

dir. 7.1 eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$A_a^b = \int_a^b f(x) dx$$

elde edilir. O halde  $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$  için

$$\int_a^b f = \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

$$\text{olduğundan } \lim_{\|P_n\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t_k) \cdot \Delta x_k = A_a^b = \int_a^b f \text{ elde edilir.}$$

İki eğri arasında kalan alan:  $[a, b]$  aralığında sürekli  $f$  ve  $g$  fonksiyonları verilsin.  $[a, b]$  aralığının bir parçalanışı  $P_n = \{a=x_0, x_1, \dots, x_n=b\}$  olsun.  $f$  ve  $g$  eğrileri arasında kalan ve  $[x_{k-1}, x_k]$  alt aralığına ait olan alanı da  $A_k$  ile gösterelim. Dolayısıyla  $f$  ve  $g$  eğrileri arasındaki kalan  $[a, b]$  aralığına ait alan

$$A = \sum_{k=1}^n A_k$$

olur.

$$t_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ için } A_k \approx [f(t_k) - g(t_k)] \cdot \Delta x_k$$

dir. Dolayısıyla

$$A \approx \sum_{k=1}^n [f(t_k) - g(t_k)] \cdot \Delta x_k$$

$$A = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(t_k) - g(t_k)] \cdot \Delta x_k$$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

bulunur.

örnek 1.  $y = x^4$ ,  $x$ -ekseni,  $x=0$ ,  $x=1$  doğruları arasında kalan bölgenin alanı nedir?

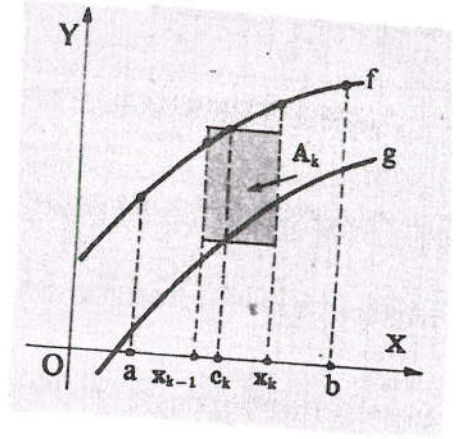
Çözüm:  $A = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{5} \cdot 1^5 - \frac{1}{5} \cdot 0^5 = \frac{1}{5} \text{ br}^2$

Genel olarak  $[a, b]$  aralığında  $f(x) \geq 0$  olmuyorsa, ilgili alan şu önerme yardımıyla bulunur:

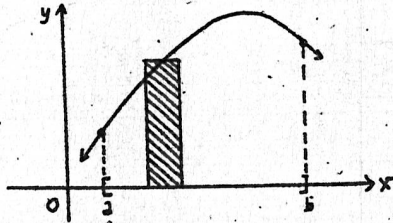
7.1 Önerme:  $y = f(x)$ ,  $x$ -ekseni,  $x=a$ ,  $x=b$  doğrularıyla sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

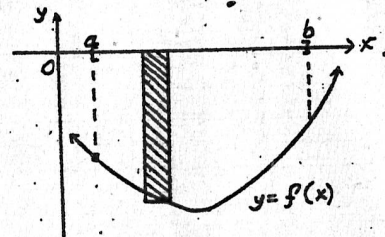
dir.



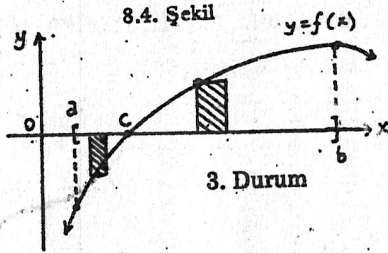
İspat:



1. Durum



2. Durum



3. Durum

8.4. Şekil

1. DURUM: Her  $x \in [a, b]$  için  $f(x) \geq 0$  ise,  $A = \int_a^b f(x) dx$  'dir,

2. DURUM: Her  $x \in [a, b]$  için  $f(x) \leq 0$  ise,  $A = -\int_a^b f(x) dx$  'dir,

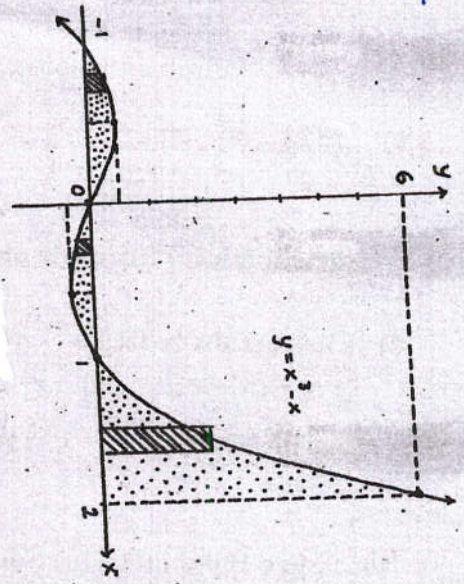
3. DURUM: Her  $x \in [a, c]$  için  $f(x) \leq 0$  ve her  $x \in [c, b]$  için  $f(x) \geq 0$  ise

$$A = -\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

tir.



örnek 2.  $y = x^3 - x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$  ile sınırlı bölgenin alanını bulalım.  
Çözüm:



$[-1, 2]$  aralığında  $f(x) = x^3 - x$  fonksiyonu 0 ve 1 noktalarında işaret değiştirmektedir. Böylece  $[-1, 0]$  ile  $[1, 2]$  aralıklarında  $f(x) \geq 0$  ve  $[0, 1]$  aralığında  $f(x) \leq 0$  olduğu için

$$A = \int_{-1}^2 |f(x)| dx$$

$$= \int_{-1}^0 |f(x)| dx + \int_0^1 |f(x)| dx + \int_1^2 |f(x)| dx$$

den

$$A = \int_{-1}^0 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

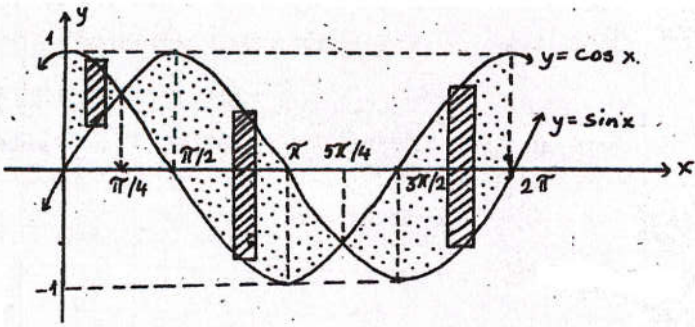
$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx + \int_1^2 (x^3 - x) dx$$

$$= \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 - \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2$$

$$= \left[ 0 - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right] - \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 0 \right] + \left[ \frac{16}{4} - \frac{4}{2} - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{4} - \left( -\frac{1}{4} \right) + \frac{9}{4} = 1\frac{1}{4} = 2,75 \text{ br}^2$$

örnek 3.  $[0, 2\pi]$  aralığında  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulalım.  
Çözüm:



Önce  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$  eğrilerinin kesişim noktaları bulalım.

$$\sin x = \cos x \Rightarrow x = \pi/4, x = 5\pi/4$$

$[0, \pi/4]$  ile  $[5\pi/4, 2\pi]$  aralıklarında  $\cos x \geq \sin x$  ve  $[\pi/4, 5\pi/4]$  de  $\cos x \leq \sin x$  old.

$$A = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x) dx$$

$$= \left[ \sin x + \cos x \right]_0^{\pi/4} + \left[ -\cos x - \sin x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} + \left[ \sin x + \cos x \right]_{5\pi/4}^{2\pi}$$

$$A = 4\sqrt{2}$$

Bazı durumlarda  $x=f(y)$ ,  $x=g(y)$  eğrileri  $y=c$ ,  $y=d$  doğruları arasında kalan bölgenin alanı istenebilir. Benzer olarak

$$A = \int_c^d |f(y) - g(y)| dy$$

elde edileceği açıktır.

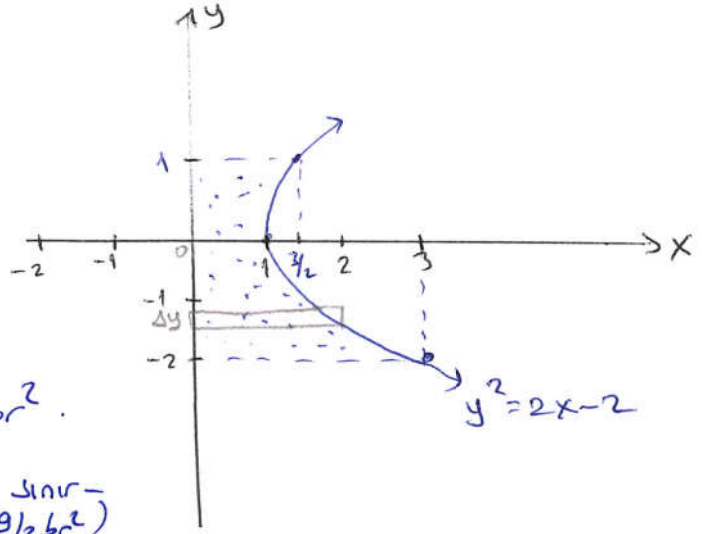
Örnek:  $y^2 = 2x - 2$ ,  $y$ -ekseni,  $y = -2$ ,  $y = 1$  doğrularıyla sınırlanan bölgenin alanını bulalım.

Çözüm:  $y^2 = 2x - 2 \Rightarrow x = \frac{y^2 + 2}{2}$

$$A = \int_{-2}^1 \left| \frac{y^2 + 2}{2} - 0 \right| dy$$

$$= \int_{-2}^1 \left( \frac{y^2}{2} + 1 \right) dy = \left[ \frac{y^3}{6} + y \right]_{-2}^1$$

$$= \left( \frac{1}{6} + 1 \right) - \left( -\frac{8}{6} - 2 \right) = \frac{9}{2} \text{ br}^2.$$



Ödev: 1)  $y = x^2 - 2$  ile  $y = x$  eğrileriyle sınırlanan bölgenin alanını bulunuz. ( $A = 9/2 \text{ br}^2$ )

2)  $x^2 + y^2 = 25$  çemberi,  $y = x + 5$  doğrusu ve  $y^2 = \frac{16}{3}x$  parabolü ile sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

$$\left( A = 2 \cdot \left[ \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - 2 \right] + \frac{25}{2} + 25 \frac{\pi}{4} \right)$$