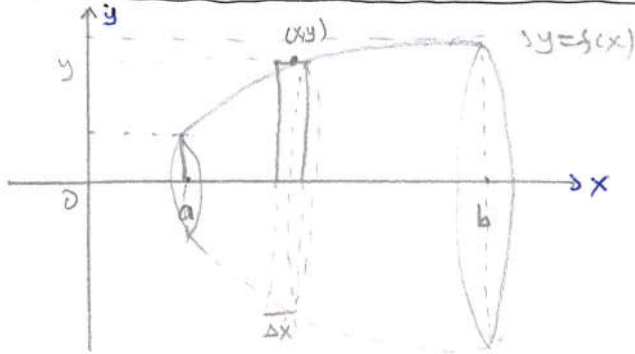


7.2. İntegralle Hacim Bulunması

Bir düzlemsel bölgenin dönme eksenini adını alan bir doğru çevresinde döndürülmesiyle oluşan cisme dönel cisim denir. Bu kısımda dönel cisimlerin hacimlerini bulmada kullanılan iki yöntem vereceğiz.

1. Silindirik (Disk, Dilimleme) Metodu:



$[a, b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olan bir $y=f(x)$ fonksiyonu verilsin ve dönme eksenini x -ekseni alınsın. $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$ eğrileriyle sınırlanan bölgenin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulmak istiyoruz.

P , $[a, b]$ 'nin herhangi parçasını olmak üzere her bir $[x_{k-1}, x_k]$ alt

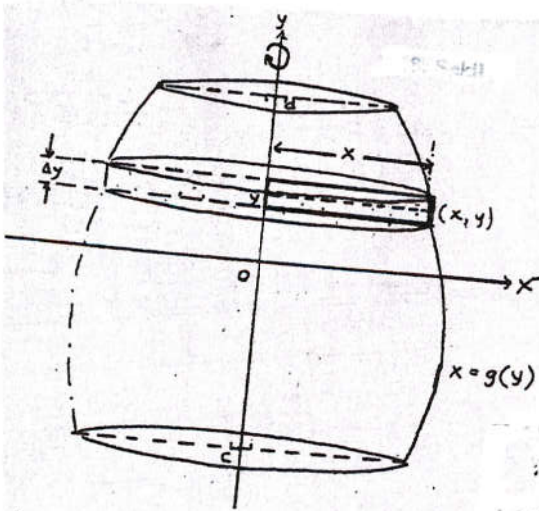
aralığından seçilen t_k noktası için tabanı Δx_k , yüksekliği $f(t_k)$ olan bir D_k dikdörtgeninin x -ekseni etrafında döndürülmesiyle bir S_k silindiri elde edilir. Bu silindirin hacmi $V(S_k) = \pi \cdot [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$ dir.

Böylece dönel cismin yaklaşık hacmi $V \approx \sum_{k=1}^n V(S_k) = \sum_{k=1}^n \pi \cdot [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi \cdot [f(t_k)]^2 \cdot \Delta x_k$ limit değeri bize dönel cismin hacmini verir.

Belirli integral tanımı hatırlanırsa

$$V = V_x = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx \text{ olur.}$$



Benzer olarak y -ekseni üzerindeki $[c, d]$

aralığında $g(y) \geq 0$ olan bir $x=g(y)$

fonksiyonu için $x=g(y)$, $x=0$, $y=c$, $y=d$

eğrileriyle sınırlanan bölgenin y -ekseni

etrafında döndürülmesiyle oluşan

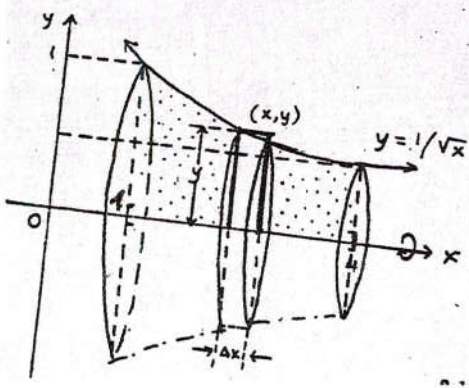
dönel cismin hacmi

$$V_y = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 dy \text{ dir.}$$

Örnek: 1) $y = \frac{1}{x}$, x -ekseni, $x=1$, $x=4$ ile sınırlanan bölgenin x -ekseni çevresinde döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm: oluşturulan silindirik dilimin hacim elemanı

$$\Delta V_x = \pi \cdot y^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot \Delta x = \frac{\pi}{x^2} \Delta x$$



olup bunların toplamı

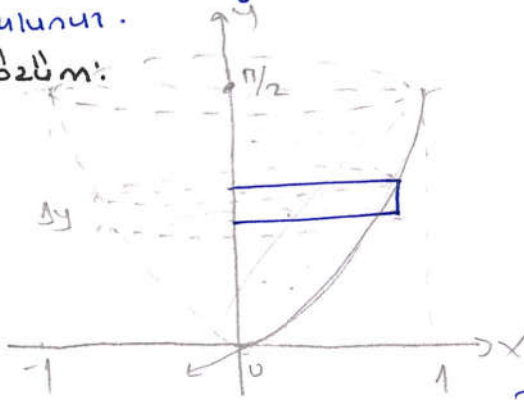
$\sum \Delta V_x = \sum \pi x \Delta x$ +tr. $[1,4]$ aralığında eşleştirdiğimiz için

$$V_x = \pi \cdot \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \pi \cdot \ln|x| \Big|_1^4$$

$$= \pi \cdot (\ln 4 - \ln 1) = \pi \cdot \ln 4 \text{ br}^3.$$

Örnek 2: $y = \arcsin x$, y -ekseni, $y = \pi/2$ ile sınırlanan bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunur.

Çözüm:



y değişkeni $[0, \pi/2]$ aralığında kalırken $\Delta V_y = \pi \cdot x^2 \cdot \Delta y = \pi \cdot \sin^2 y \cdot \Delta y$

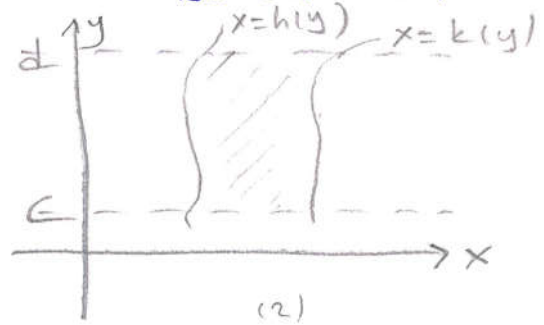
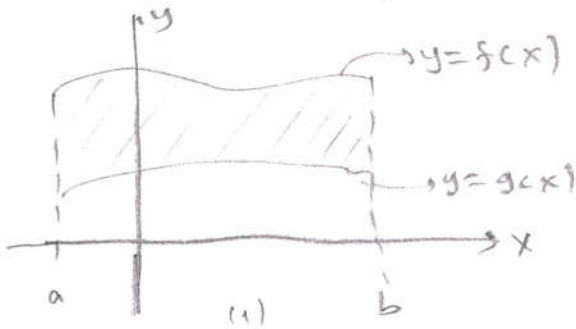
$$(y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y)$$

Dolayısıyla

$$V_y = \pi \cdot \int_0^{\pi/2} x^2 dy = \pi \cdot \int_0^{\pi/2} \sin^2 y dy =$$

$$= \pi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2y}{2} dy = \frac{\pi}{2} \left[y - \frac{1}{2} \sin 2y \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right)$$

Bazende iki eğri arasında kalan bölgenin x -ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmi istenebilir. Bu durumda



$$V = \left(\text{Dıştaki eğrinin dönmesiyle oluşan cismin hacmi} \right) - \left(\text{İçteki eğrinin dönmesi ile oluşan cismin hacmi} \right)$$

kuralı ile bulunur. Buna göre (1) şeklindeki alanın x -ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmi

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \cdot \int_a^b [g(x)]^2 dx = \pi \cdot \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx$$

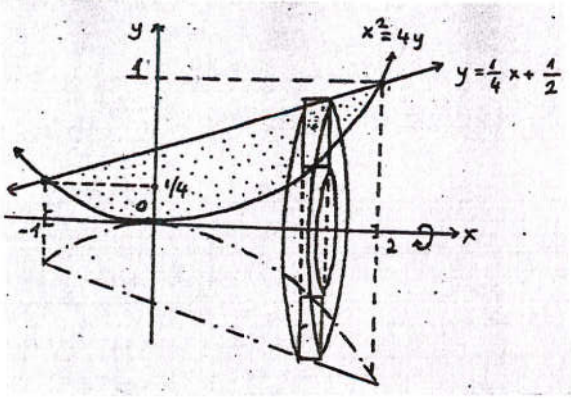
formülü ile bulunur. Benzer şekilde (2) debi şeklin alanının y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi de

$$V = \pi \cdot \int_c^d [k(y)]^2 dy - \pi \cdot \int_c^d [h(y)]^2 dy = \pi \cdot \int_c^d ([k(y)]^2 - [h(y)]^2) dy$$

formülü ile bulunur.

örnek: $x^2=4y$ parabolüyle $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$ doğrusu arasında kalan bölgenin x -ekseni çevresinde döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulalım.

Çözüm



Parabol ile doğrunun kesişme noktaları

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$$

$$(-1, 1/4), (2, 1)$$

$$\Delta V_x = \pi \cdot \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right)^2 \Delta x - \pi \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 \Delta x$$

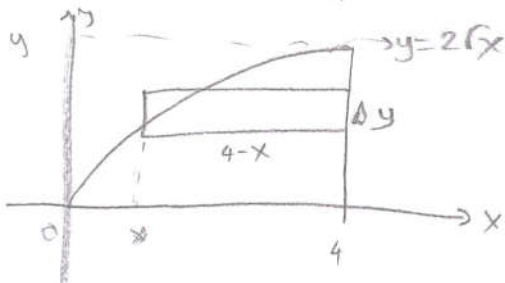
$$V_x = \int_{-1}^2 \pi \cdot \left[\frac{x^2}{16} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4} - \frac{x^4}{16} \right] dx$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{48} + \frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - \frac{x^5}{80} \right] \Big|_{-1}^2$$

$$= \frac{63}{20} \pi$$

Dönel cisimlerin hacimleri hesaplanırken dönme eksenini olarak x ve y alındı. Ancak başka eksenler etrafında dönme yapmak mümkündür. Şimdi de x ve y eksenlerine paralel olan eksenler etrafında dönme yapıldığında hacmin nasıl hesaplanacağını bir örnekle görelim!

örnek:1) $y=2\sqrt{x}$ eğrisi, x -ekseni, $x=4$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin $x=4$ doğrusu etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulalım.



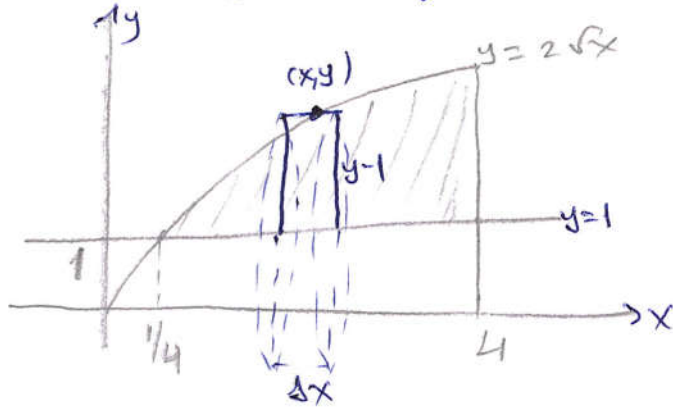
Bir kenarı dönme ekseninde olan bir temsilci dikdörtgenin (şekildeki gibi) $x=4$ doğrusu etrafında dönmesi ile yüksekliği Δy , taban yarısapı $4-x$ olan bir düğün silindirik elde edilir. Bu silindirik hacmi

$$V_t = \pi \cdot (4-x)^2 \cdot \Delta y \quad \text{dir. } y \in [0, 4]$$

İstenen hacim

$$V = \pi \int_0^4 (4-x)^2 dy = \pi \cdot \int_0^4 \left(4 - \frac{y^2}{4}\right)^2 dy = \frac{512}{15} \pi \text{ br}^3.$$

Örnek 2. $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi, $y=1$, $x=4$ doğruları arasında kalan alanın $y=1$ etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmini bulalım!



$y = 2\sqrt{x}$, $y = 1$ in kesiştiği noktada

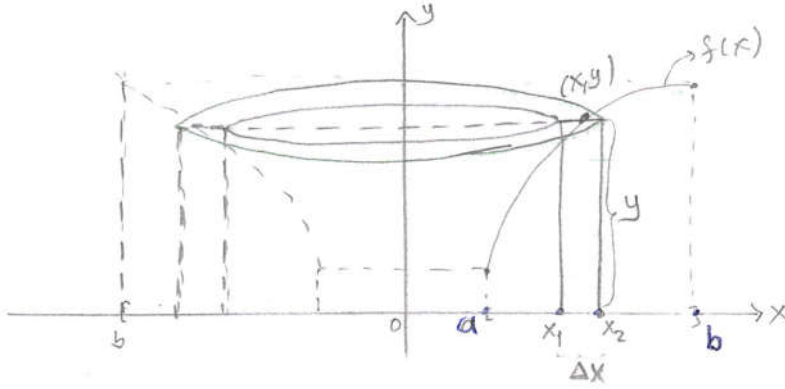
$$2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Temsilci dikdörtgenin $y=1$ etrafında dönmesi ile yüksekliği Δx , taban yarıçapı $y-1$ olan düzgün silindirik oluşur. Bu silindirik hacmi

$$\Delta V = \pi (y-1)^2 \Delta x$$

$$V = \pi \int_{1/4}^4 (y-1)^2 dx = \pi \int_{1/4}^4 (2\sqrt{x}-1)^2 dx = \frac{117}{8} \pi$$

2. Kabuk Yöntemi (Silindirik Kabuklar Yöntemi)



$a \leq x \leq b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olan bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin ve dönme eksenini olarak y -ekseni alınsın. Tabanı Δx , yüksekliği y olan dikdörtgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan kabukçunun ΔV_y hacim elemanı şöyle bulunur;

x noktasını $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ olarak seçersek,

$$\Delta V_y = \pi \cdot x_2^2 y - \pi \cdot x_1^2 y = \pi y (x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = \pi \cdot y \cdot 2x \cdot \Delta x$$

$$\Delta V_y = 2\pi x y \Delta x$$

olur. Dolayısıyla $y = f(x)$, x -ekseni, $x = a$, $x = b$ ile sınırlanan bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi

$$V_y = 2\pi \int_a^b x \cdot y \cdot dx = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$$

olur.

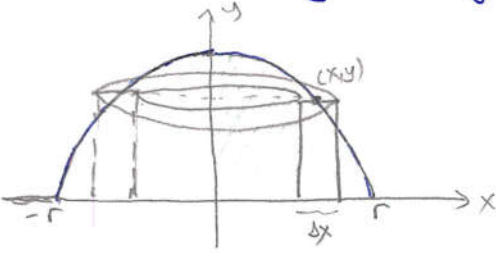
Benzer yolla $0 \leq c \leq d$ olmak üzere y -ekseni üzerinde $g(x) \geq 0$ ise $x=g(y)$, y -ekseni, $y=c$, $y=d$ ile sınırlanan bölgenin x -ekseni çevresinde döndürülmesiyle oluşan cismin hacim elemanı

$$\Delta V_x = 2\pi \cdot y \cdot x \cdot \Delta y \quad \text{ve buradan da hacmi}$$

$$V_x = 2\pi \int_c^d y \cdot x \cdot dy = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) \cdot dy$$

dur.

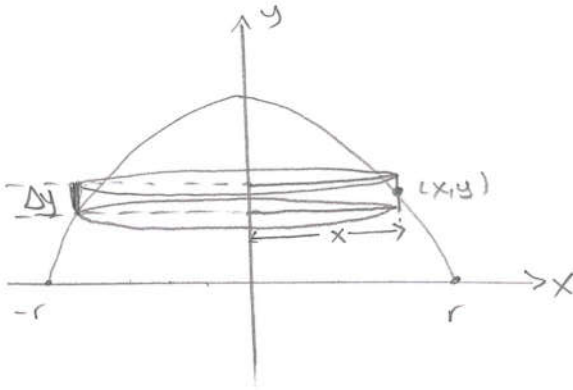
Örnek: 1) Birinci dörtlükte $x^2 + y^2 = r^2$ çemberiyle sınırlanan bölgenin y -ekseni çevresinde döndürülmesiyle oluşan yarım kürenin hacmi?
 Çözüm: soruyu iki yöntemle de çözelim:



$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad \Delta V_y = 2\pi x y \Delta x \\ = 2\pi x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \Delta x$$

$$[0, r] \text{ aralığında çalıştığımız için } r \\ V_y = 2\pi \int_0^r x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} dx = -\frac{2\pi}{3} (r^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^r \\ = 0 - \left(-\frac{2\pi}{3} r^3\right) = \frac{2\pi r^3}{3}$$

bulunur.



$$\Delta V_y = \pi x^2 \Delta y$$

$$= \pi (r^2 - y^2) \Delta y$$

$$V_y = \pi \int_0^r (r^2 - y^2) dy = \pi \left(r^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{y=0}^{y=r} \\ = \pi \left[r^3 - \frac{r^3}{3} - 0 \right] = \frac{2\pi r^3}{3}$$