

4.2. Türevle ilgili Teoremler

Teorem: $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in I$ noktasında türevlenebiliyorsa, f fonksiyonu a noktasında sürekli'dir.

ispat: $f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + f(a)$

yanılabılır. Her iki yanın $x \rightarrow a$ iken limiti alınır

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a)$$

yanılır. f , a noktasında türevli olduğundan

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

limiti vardır. Yine $\lim_{x \rightarrow a} (x - a) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} f(a) = f(a)$ old.,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f'(a) \cdot 0 + f(a), \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ olur ki}$$

bu ise f 'nin a noktasında sürekli olması demektir.

Not: Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani f fonksiyonu a noktasında sürekli iye bu noktada türevli olması gerekmez. Örneğin, $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli'dir fakat bu noktada türevli değildir.

Teorem 1) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları a noktasında türevlenebilir iye her $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ için

$$(r_1 \cdot f + r_2 \cdot g)'(a) = r_1 \cdot f'(a) + r_2 \cdot g'(a)$$

dir.

ispat: $(r_1 \cdot f + r_2 \cdot g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(r_1 \cdot f + r_2 \cdot g)(x) - (r_1 \cdot f + r_2 \cdot g)(a)}{x - a}$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{r_1 \cdot f(x) + r_2 \cdot g(x) - r_1 \cdot f(a) - r_2 \cdot g(a)}{x - a}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} \left[r_1 \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + r_2 \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right]$$
$$= r_1 \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + r_2 \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
$$= r_1 \cdot f'(a) + r_2 \cdot g'(a)$$

Not: $r_1 = 1 = r_2$ için

$r_1 = 1, r_2 = -1$ için

$r_2 = 0, r_1 \neq 0$ için

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a),$$

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$$

$$(r_1 f)'(a) = r_1 \cdot f'(a) \text{ dir.}$$

2) f ve g fonksiyonları a noktasında türevli ise $f \cdot g$ fonksiyonu da a noktasında türevli olup,

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

dir.

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\ &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(x) + f(a) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot f(a) \end{aligned}$$

g , a noktasında türevli olduğundan g fonksiyonu a noktasında sürekli. Dolayısıyla $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ olur. Yukardaki eşitlikte

her iki yanın $x \rightarrow a$ iken limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \end{aligned}$$

Yani, $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$ olur.

3) g fonksiyonu a noktasında türevli ve $g(a) \neq 0$ ise $\frac{1}{g}$ fonksiyonunda a noktasında türevli olup,

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

$$\begin{aligned} \text{İspat: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a) - g(x)}{g(x) \cdot g(a) (x - a)} \\ &= -\frac{1}{g(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{[g(a)]^2}$$

4) f ve g fonksiyonlarının a noktasında türevleri varsa ve $g(a) \neq 0$ ise f/g fonksiyonu da a noktasında türevli olup,

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{[g(a)]^2}$$

olur.

$$\text{İspat: } \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g} \text{ dir. (2) ve (3) kullanılırsa istenen elde}$$

edilir.