

Teorem: (Bileşke fonksiyonun Türevi) f fonksiyonu a noktasında türevli ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu da $f(a)$ noktasında türevlidir ve

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

dir.

İspat: Türevin tanımından

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

$$= g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

(f türevli \Rightarrow sürekli old.) $x \rightarrow a$ iken $f(x) \rightarrow f(a)$ dir.)
Buna türev almada zincir kuralı denir.

Sonuç: f, g türevlenebilir ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu da türevlenebilir ve $y = f(x)$ olmak üzere

$$D_x [(g \circ f)(x)] = D_y [g(y)] \cdot D_x [f(x)]$$

dir.

Not: Zincir kuralı:

f fonksiyonu x in bir fonksiyonu ve x de t ye bağlı bir fonksiyon olsun. f x e göre, x de t ye göre türevli ise f nin t ye göre türevi:

$$y = f(x) \quad y = f(h(t)) = (f \circ h)(t)$$

$$x = h(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = f'(x) \cdot h'(t) = f'(h(t)) \cdot h'(t) = (f \circ h)'(t)$$

Örnek: 1) $y = \sin^n x$ ise $\frac{dy}{dx} = y' = ?$

$$f(x) = x^n, \quad g(x) = \sin x \Rightarrow y = (f \circ g)(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = n \cdot \sin^{n-1} x \cdot \cos x$$

2) $|x| = \sqrt{x^2}$ den yararlanarak $D_x |x|$ türevini bulunuz. ($x \neq 0$)

$$|x| = \sqrt{x^2}, \quad y = x^2 \text{ denirse } |x| = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{d(|x|)}{dx} = \frac{d(\sqrt{y})}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d(|x|)}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} \Rightarrow \boxed{D_x (|x|) = \frac{x}{|x|}} \quad x \neq 0 \text{ bulunur.}$$

Örnek: 1) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $D_x(x^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$ dir.

$$b^n - a^n = (b-a) \cdot (b^{n-1} + b^{n-2} \cdot a + \dots + b \cdot a^{n-2} + a^{n-1}) \quad \text{Özdeşliğinde}$$

$$b = x^{1/n}, \quad a = x_0^{1/n} \quad \text{yazılırsa,}$$

$$\frac{x^{1/n} - x_0^{1/n}}{x - x_0} = \frac{1}{x^{1-1/n} + x^{1-\frac{2}{n}} x_0 + \dots + x x_0^{1-\frac{2}{n}} + x_0^{1-\frac{1}{n}}}$$

her iki yanın limiti
 \Rightarrow alınır

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{1/n} - x_0^{1/n}}{x - x_0} = \frac{1}{x_0^{1-\frac{1}{n}} + x_0^{1-\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n \cdot x_0^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} \cdot x_0^{\frac{1}{n}-1} \Rightarrow$$

$$D_x(x^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{bulunur.}$$

2) Her $r \in \mathbb{Q}$ için $D_x(x^r) = r \cdot x^{r-1}$ dir. (rasyoneller için kuvvet formülü)
 $r \in \mathbb{Q}, q > 0, r = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$ yazılır. $x^r = x^{\frac{p}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$, $y = x^{\frac{1}{q}}$ den yazılırsa

$$x^r = y^p \Rightarrow \frac{d(x^r)}{dx} = \frac{d(y^p)}{dx} = \frac{d(y^p)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot y^{p-1} \cdot \frac{1}{q} \cdot x^{\frac{1}{q}-1} =$$

$$= \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p-1}{q}} \cdot x^{\frac{1-q}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p-q}{q}} = \frac{p}{q} \cdot x^{\frac{p}{q}-1} = r \cdot x^{r-1}$$

3) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^\alpha$ ise $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$ dir:
 (reel için kuvvet formülü)

$$a > 0, a \neq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ için } x^\alpha = a^{\frac{\alpha \log x}{\log a}}$$

$$y = a^u, u = \frac{\alpha \log x}{\log a}, \text{ zincir kuralına göre}$$

$$(x^\alpha)' = (a^{\frac{\alpha \log x}{\log a}})' = (a^u)' \cdot u' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$= a^{\frac{\alpha \log x}{\log a}} \cdot \ln a \cdot (\frac{\alpha \log x}{\log a})'$$

$$= x^\alpha \cdot \ln a \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x \ln a} = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \quad \text{dir.}$$

Örnek: $y = \sqrt[3]{\frac{x^2-3x}{x^3+4x-7}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$

$$z = \frac{x^2-3x}{x^3+4x-7}, \quad y = z^{1/3}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d(z^{1/3})}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3} \cdot z^{-1/3} \cdot \frac{(2x-3) \cdot (x^3+4x-7) - (x^2-3x) \cdot (3x^2+4)}{(x^3+4x-7)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-x^4+6x^3+4x^2-14x+21}{(x^3+4x-7)^2}$$

~~1/3~~

Teorem: (ters fonksiyonun Türevi) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olsun. Ayrıca $a < c < b$ için $f'(c) \neq 0$ olsun. Bu takdirde f^{-1} ters fonksiyonu $d = f(c)$ noktasında türevlenebilir ve ters fonksiyonun türevi

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(c)} \text{ dir. Yani } (f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)} \text{ dir.}$$

İspat: f , sürekli ve artan olduğundan $f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ fonksiyonu 1-1 ve birtendir. Dolayısıyla tersi vardır. Yani $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ mevcuttur. f^{-1} ters fonksiyonunun $d = f(c)$ noktasında türevini bulalım.

$\lim_{y \rightarrow d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d}$ limitini hesaplayalım.
 $f^{-1}(y) = x \Rightarrow y = f(x)$, $y \rightarrow d \Leftrightarrow f(x) \rightarrow f(c) \xRightarrow{f \text{ sürekli}} f^{-1}(f(x)) \rightarrow f^{-1}(f(c)) \xRightarrow{x \rightarrow c} \text{ olur.}$

$$\lim_{y \rightarrow d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} = \lim_{y \rightarrow d} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{\frac{f(x) - f(c)}{x - c}} = \frac{1}{f'(c)}$$

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)} \text{ olur. Genellesek, } \left[x'_y = \frac{1}{y'_x} \right] \text{ dir.}$$

Örnek: 1) $f: [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x \Rightarrow (f^{-1})'(33) = ?$
 f sürekli ve artandır. Ayrıca her noktada türevi vardır.
 $33 = f(3)$ dir. Ters fonk. Türevi formülüne göre,
 $(f^{-1})'(f(3)) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{29}$ dir. $f'(x) = 3x^2 + 2$
 $f'(3) = 29$ dir.

2) $y = \arctan x$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki türevi = ?
 $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$
 $(\arctan x)'_{x=1} = \frac{1}{(\tan y)'_{y=\pi/4}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 y)_{y=\pi/4}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

$$(y = \tan x \Rightarrow y' = 1 + \tan^2 x \text{ dir çünkü})$$

$$y' = (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \text{ dir.}$$

Kapalı fonksiyonların türevi:

$F(x,y)=0$ denklemiyle verilen fonksiyonların türevlerini bulmak için yapılarak işlem, $F(x,y)=0$ denkleminde, $y=f(x)$ gibi, y nin x e bağlı değeri elde edilebiliyorsa türev $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ dur. y nin x cinsinden ifadesini hesaplamak çoğu kez olanaklıdır. Bu durumda, denklemdeki her terimin x e göre türevi alınır. Bu hesaplamalarda y nin x e bağlı bir ifade olduğu göz önüne alınarak, zincir kuralı uygulanır. Örneğin; $x^3+y^3+2xy=0$ eşitliğiyle verilen $y=f(x)$ fonksiyonu için y'_x i hesaplayalım:

$$3x^2+3y^2 \cdot y'_x + 2y+2xy'_x=0, \quad y'_x(3y^2+2x)=-3x^2-2y$$

$$y'_x = -\frac{3x^2+2y}{3y^2+2x} \text{ olur.}$$

$F(x,y)=0$ denkleminde her iki tarafın x e göre türevi alınır, $F'_x(x,y) + F'_y(x,y) \cdot y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

bulunur.

parametrik fonksiyonların türevi: $x=x(t)$, $y=y(t)$ ile belirlenen bir parametrik fonksiyonun türevini zincir kuralını uygulayarak bulabiliriz. Şöyle ki,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \text{ bulunur.}$$

Örneğin; $a>0$ olmak üzere $x=\frac{at^3}{1+t^2}$, $y=\frac{at^2}{1+t^2}$ ile verilen parametrik fonksiyon için $D_x y$ türevini $t=1$ noktasında bulalım:

$$D_t x = \frac{dx}{dt} = \frac{3at^2(1+t^2) - at^3 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{3at^2 + at^4}{(1+t^2)^2}, \quad \left. \vphantom{\frac{dx}{dt}} \right\} \Rightarrow$$

$$D_t y = \frac{dy}{dt} = \frac{2at(1+t^2) - at^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2at}{(1+t^2)^2}$$

$$D_x y = \frac{dy}{dx} = \frac{D_t y}{D_t x} = \frac{2at}{t(t^2+3)} \quad , \quad t=1 \text{ için } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{2}{1 \cdot (1+3)} = \frac{1}{2}.$$

Logaritmik Türev: $u: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ve $v: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları
 $x \in (a,b)$ noktasında türevli ise $u^v: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu da
 x noktasında türevlidir ve
 $(u^v)'(x) = (u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)} \left[v'(x) \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)} \right]$ dir.
 İspat: $y = u(x)^{v(x)}$ ise $\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$ kapalı türev uygulanırsa,

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot v(x)$$

Örnek: $f(x) = x^{\sin x}$ ise $f'(x) = ?$

$$y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow y' = x^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right]$$

Bazı özel fonksiyonların türevleri:

1) $f: \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

2) $f: \mathbb{R} - \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \cot x$, $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x = -(1 + \cot^2 x)$

3) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \arcsin x$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (\arccos x)'$

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \arctan x$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (-\operatorname{arccot} x)'$

5) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \sinh x$, $f'(x) = \cosh x$

6) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \cosh x$, $f'(x) = \sinh x$

7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \tanh x$, $f'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x}$

8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \coth x$, $f'(x) = -\frac{1}{\sinh^2 x}$

9) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

10) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $f'(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

11) $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

12) $f: \mathbb{R} - [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$f(x) = \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

13) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arsech} x$

$\Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = f'(x)$, $(\operatorname{Arccsch} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

Gebühren:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x = -(1 + \cot^2 x)$$

$\forall x \in (-1, 1) \vee \forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\forall x \in (-1, 1) \vee \forall y \in (-\pi, \pi)$, $y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y$

$$(\arccos x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\forall x \in (-1, 1), \forall y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist $y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y$

$$(\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in (0, \pi)$ ist $y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y$

$$(\operatorname{arccot} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{-(1 + \cot^2 y)} = -\frac{1}{1 + x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ist $(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right)' = \frac{1}{2} \cdot (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \right)' = \frac{1}{2} \cdot (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ist $(\tanh x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \tanh^2 x$

$(\coth x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cosech}^2 x = 1 - \coth^2 x$

$y = \operatorname{arsinh} x \Leftrightarrow x = \sinh y$, $(\operatorname{arsinh} x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$

$y = \operatorname{arcosh} x \Leftrightarrow x = \cosh y$, $(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

$y = \operatorname{artanh} x \Leftrightarrow x = \tanh y$, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$

$y = \operatorname{arcoth} x \Leftrightarrow x = \coth y$, $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \coth^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$

$y = \operatorname{arcsech} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sech} y = \frac{1}{\cosh y}$

$$1 = -\frac{\sinh y \cdot y'}{\cosh^2 y} \Rightarrow y' = \frac{1}{-\tanh y \cdot \operatorname{sech} y} = \frac{-1}{x \cdot \sqrt{1 - x^2}}$$

$y = \operatorname{arcseth} x \Leftrightarrow x = \operatorname{csch} y \Rightarrow 1 = -\frac{\cosh y \cdot y'}{\sinh^2 y} \Rightarrow y' = -\frac{\sinh^2 y}{\cosh y \cdot \coth y \cdot \cosh y}$

$$x = \frac{1}{\sinh y}$$

$$y' = \frac{-1}{x \cdot \sqrt{1 + x^2}}$$

$$y = \operatorname{sech} x \Rightarrow y' = -\operatorname{sech} x \tanh x \text{ dir.}$$

$$y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \Rightarrow y' = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{1}{\cosh x} \cdot \frac{\sinh x}{\cosh x} = -\operatorname{sech} x \cdot \tanh x$$

$$y = \operatorname{csch} x \Rightarrow y' = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x \text{ dir.}$$

$$y = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} \Rightarrow y' = \frac{-\cosh x}{\sinh^2 x} = -\frac{1}{\sinh x} \cdot \frac{\cosh x}{\sinh x} = -\operatorname{csch} x \cdot \coth x$$

$$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \cdot \tan x \text{ dir.}$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow y' = \frac{+\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \cdot \tan x$$

$$y = \operatorname{cosec} x \Rightarrow y' = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x \text{ dir.}$$

$$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$