

4.2. Gözetimli Örnekler:

1) $f(x) = \arccsc(\ln(x^2+1)) - \tan^2(\arcsin e^x) \Rightarrow f'(x) = ?$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \cdot \frac{-1}{\ln(x^2+1) \cdot \sqrt{\ln^2(x^2+1)-1}} - 2 \tan(\arcsin e^x) \cdot (1 + \tan^2(\arcsin e^x)) \cdot \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}$$

2) $f(x) = \ln(\ln(\sin x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln(\sin x))'}{\ln(\sin x)}$

$$f'(x) = \frac{\cos x / \sin x}{\ln(\sin x)} = \frac{\cot x}{\ln(\sin x)}$$

3) $\frac{d}{dx} (\sqrt{x^3 + \csc x}) = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + \csc x}} \cdot \frac{d}{dx} [x^3 + \csc x]$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^3 + \csc x}} \cdot (3x^2 - \csc x \cot x) = \frac{3x^2 - \csc x \cot x}{2\sqrt{x^3 + \csc x}}$$

4) $\frac{d}{dx} [(1+x^5 \cot x)^{-8}] = -8 \cdot [1+x^5 \cot x]^{-9} \cdot \frac{d}{dx} (1+x^5 \cot x)$

$$= -8 \cdot [1+x^5 \cot x]^{-9} \cdot (5x^4 \cot x - x^5 \csc^2 x)$$

$$= (8x^5 \csc^2 x - 40x^4 \cot x) \cdot [1+x^5 \cot x]^{-9}$$

5) $\frac{d}{dx} (\cos^2 \pi x) \Rightarrow \pi \cdot 2 \cos(\pi x) \cdot (-\sin(\pi x)) = -2\pi \sin \pi x \cdot \cos \pi x$

6) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ verilmiş.

- (a) $x \neq 0$ için $f'(x) = ?$
 (b) $x = 0$ da f süreklidir, gözet.
 (c) Türev tanımını kullanarak $f'(0)$ in mevcut olmadığını gözet.

Gözetim:

a) $x \neq 0$ için $f'(x) = x \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) + \sin \frac{1}{x}$

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$

c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot \sin \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sin \frac{1}{h}$ yoktur.

7) Tabloda verilen değerlere göre
 (a) $x=5$ de istenen türevleri bulunuz.

x	f(x)	f'(x)
2	1	7
8	5	-3

a) $g(x) = [f(x)]^3 \Rightarrow g'(2) = ?$

b) $h(x) = f(x^3) \Rightarrow h'(2) = ?$

$g'(x) = 3(f(x))^2 \cdot f'(x) \Rightarrow g'(2) = 3 \cdot (f(2))^2 \cdot f'(2) = 3 \cdot 1^2 \cdot 7 = 21$

$h'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3) \Rightarrow h'(2) = 3 \cdot 2^2 \cdot f'(2^3) = 3 \cdot 4 \cdot (-3) = -36$

8)

x	f(x)	f'(x)	g(x)	g'(x)
-1	2	3	2	-3
2	0	4	1	-5

ise a) $F(x) = f(g(x)) \Rightarrow F'(-1) = ?$

b) $G(x) = g(f(x)) \Rightarrow G'(-1) = ?$

a) $F'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \Rightarrow F'(-1) = g'(-1) \cdot f'(g(-1)) = (-3) \cdot f'(2)$
 $= (-3) \cdot 4 = -12$

b) $G'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) \Rightarrow G'(-1) = f'(-1) \cdot g'(f(-1)) = 3 \cdot g'(2) = 3 \cdot (-5) = -15$

9) $\frac{d}{dx} (f(x^2)) = x^2 \Rightarrow f'(x^2) = ?$

$2x \cdot f'(x^2) = x^2 \Rightarrow f'(x^2) = x/2$

10) $\frac{d}{dx} (f(3x)) = 6x \Rightarrow \frac{d}{dx} (f(x)) = ?$

$3 \cdot f'(3x) = 6x \Rightarrow f'(3x) = 2x$, $u = 3x$, $f'(u) = \frac{2u}{3}$
 $x = \frac{u}{3}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x$ dur.

11) $5y^2 + \sin y = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = ?$

$10y \cdot y' + \cos y \cdot y' = 2x \Rightarrow y'(10y + \cos y) = 2x \Rightarrow y' = \frac{2x}{10y + \cos y}$

-23-

12) $\frac{xy^3}{1+\sec y} = 1+y^4 \Rightarrow y' = ?$

$$\frac{(x \cdot 3y^2 \cdot y' + y^3) \cdot (1+\sec y) - x \cdot y^3 \cdot (\sec y \cdot \tan y \cdot y')}{(1+\sec y)^2} = 4y^3 \cdot y'$$

$$y' = \frac{y \cdot (1+\sec y)}{4y(1+\sec^2 y) - 3x \cdot (1+\sec y) + xy \sec y \tan y}$$

13) $2y^3 t + t^3 y = 1$ ve $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t}$ ise $\frac{dy}{dx} = ?$

2'nin kuralına göre $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{2y^3 + 3t^2 y}{6ty^2 + t^3}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2y^3 + 3t^2 y}{(6ty^2 + t^3) \cdot \cos t}$

14) $\tan^3(xy^2+y) = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$

$3 \tan^2(xy^2+y) \cdot \sec^2(xy^2+y) \cdot (y^2 + x \cdot 2yy' + y') = 1$

$$y' = \frac{1 - 3y^2 \tan^2(xy^2+y) \sec^2(xy^2+y)}{3(2xy+1) \tan^2(xy^2+y) \sec^2(xy^2+y)}$$

15.) $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a \in I$ noktasında türevli ise

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

olduğunu gösteriniz.
 Çözüm:

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot f'(a) + \frac{1}{2} \cdot f'(a) = f'(a)$$

16) $x = 2t + 3t^2$, $y = t^2 + 2t^3$ olduğuna göre $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ olduğunu gösteriniz.
 Çözüm: $y'_t = 2t + 6t^2$, $x'_t = 2 + 6t$, $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t + 6t^2}{2 + 6t} = t$,
 bulunur. $y = t^2 + 2t^3$ denklemi'nde t yerine $\frac{dy}{dx}$ konulursa,
 $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ bulunur.

-24-

4.2. Ödev problemleri:

① Aşağıdaki fonk.ların türevlerini bulunur.

1) $y = \arcsin(x \cdot \cos 3x)$

2) $y = \tan\left(\arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$

3) $y = \arcsin(\sin x)$

4) $y = \frac{x \sin x + \cos x}{x \cos x - \sin x}$

5) $y = \arctan x - \operatorname{arccot} x$

6) $y = \frac{\tan 3x - \sec 3x}{\cot 3x}$

7) $y = \frac{x \sqrt{1-x^2} - \arccos x}{2}$

③ Aşağıda verilen parametrik fonk.ların türevlerini bulunur.

1) $y = \sec h(e^t + e^{-t})$
 $x = \tanh(e^t - e^{-t})$

2) $y = t^2 - 3t$

$y = t^3 - 4t^2 + 2t$

bulunur. ② Aşağıdaki fonk. türevlerini bulunur.

1) $y = \ln(\ln x)$

2) $y = e^{x^2 - 2x}$

3) $y = \ln^3 \sqrt{\tan x + \cot x}$

4) $y = \ln(\arccos x)$

5) $y = \log_3(\sec x + \operatorname{cosec} x)$

6) $y = 5^{\arcsin 2x + \arccos 2x}$

7) $y = \operatorname{arccot} x - \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

8) $y = 5^{x^4 - 2x^2}$

9) $y = 2^{\sin x}$

10) $y = (e^x)^{\tan x} + \tan x^{e^x}$

11) $y = (\sin x)^{\cos x}$

④ Aşağıda kapalı olarak verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun türevini bulunur.

1) $x^2 - 3xy^2 + 5x - 4y - 1 = 0$

2) $e^{xy} + \arctan \frac{y}{x} = 0$

3) $x^y + y^x + e^{xy} = 0$

4) $\sin(x-y) + \cos(x+y) = 0$

4.3. Yüksek Mertebeden Türevler, Türevin Geometrik ve Fiziksel Yorumu

f fonksiyonu I tanım kümesinde türeylenebilir ise, f' de aynı tanım kümesinde yeni bir fonksiyon gösterir; bu fonksiyona f nin türev fonksiyonu denir. Eğer $a \in I$ noktasında f' nin türevi varsa, yani

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = f''(a)$$

limiti varsa $f''(a)$ ifadesine f nin a noktasındaki ikinci mertebeden türevi denir.

Tanım: Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $a \in I$ noktasında $(n-1)$. mertebeden türevi var ve

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a}$$

limiti mevcut ise bu limite f nin a noktasındaki n -mertebeden türevi denir ve $f^{(n)}(a)$ ile gösterilir. Ayrıca

$y^{(n)}$, $f^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f}{dx^n}$, $D_x^n f$ sembolleri ile gösterilir.

-25-

Örnekler: 1) $y = (ax+b)^n$ ise $f^{(n)}(x) = n! \cdot a^n$ dir:

Gözlem: $f'(x) = n \cdot a \cdot (ax+b)^{n-1}$, $f''(x) = n \cdot (n-1) \cdot a^2 \cdot (ax+b)^{n-2}$... $f^{(n)}(x) = n! \cdot a^n$ dir.

2) $f(x) = \sin x$ ise $f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$ dir:

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$f'''(x) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \text{ bulunur.}$$

Örneğin ile

3) $f(x) = \cos x$ ise $f^{(n)}(x) = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2})$ dir:

$$f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + \pi) = \sin(x + \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$f'''(x) = \cos(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \text{ bulunur.}$$

4) $f(x) = a^x$ ise $f^{(n)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^n$ dir. ($a \neq 1, a > 0$)
 $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $(a^x)'' = a^x \cdot \ln a \cdot \ln a = a^x \cdot (\ln a)^2$... $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot (\ln a)^n$

5) $f(x) = \log_a |x|$, $a > 0, a \neq 1$ ise $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}}{\ln a}$ dir:

Gözüm: $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{x^{-1}}{\ln a}$

$(\log_a |x|)'' = \frac{x^{-2}}{\ln a}$, ...

$(\log_a |x|)^{(n)} = \left(\frac{(-1)^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot x^{-(n-1)}}{\ln a} \right)' = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x^{-n}}{\ln a}$

6) $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot x^{\alpha-n}$ dir:

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $(x^\alpha)'' = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}$, ...

$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-n+1) \cdot x^{\alpha-n}$

-26-

Teorem: (Leibniz Formülü): Tanım kümeleri I olan f ve g fonksiyonları, $x \in I$ için n . mertebeden (n dahil) türevlenebiliyorsa,
 $f^{(0)} = f$, $g^{(0)} = g$ olmak üzere,

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} f^{(n-r)} \cdot g^{(r)}$$

dir. $(f^{(r)})$ ifadesi f nin r . mertebeden türevini göstermektedir.)

Bu teoremin ispatı tümevarım yöntemi kullanılarak yapılır.

Örnek:1) $f(x) = e^x \cdot x^2$ ise $f^{(n)}(x) = ?$

Gözüm: $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ olsun. $g'(x) = 2x$, $g''(x) = 2$, $g'''(x) = 0$
 $f^{(n)}(x) = e^x$

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

$$= f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} \cdot g'' + 0$$

$$= e^x \cdot x^2 + n \cdot e^x \cdot 2x + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \cdot e^x \cdot 2$$

$$= [x^2 + 2nx + n(n-1)] e^x$$

Örnek 2: $x=x(t), y=y(t)$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$ nin değerini t cinsinden bulunur.

Çözüm: $x=x(t), y=y(t)$ parametrik denklemlerle verilen fonksiyonun birinci mertebeden türevi

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad \text{idi.} \Rightarrow$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} (y') = \frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\left(\frac{dy'}{dx} \right)'_t}{x'_t} \quad \text{olur.}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right) = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^2} \quad \text{olduğundan}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_t \cdot x'_t - x''_t \cdot y'_t}{(x'_t)^3} \quad \text{olur.}$$

Örnek 3: $x^2+y^2=r^2$ verildiğine göre $\frac{1}{r} = \left| \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} \right|$ olduğunu gös.

Çözüm: $x^2+y^2=r^2 \Rightarrow 2x+2yy'=0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

$$y'' = \frac{-y+x \cdot y'}{y^2} = \frac{-y+x \cdot (-\frac{x}{y})}{y^2} = \frac{-y^2-x^2}{y^3} = \frac{-r^2}{y^3} \quad \text{olur.}$$

$$\left| \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} \right| = \left| \frac{-r^2}{y^3} \cdot \frac{1}{[1+\frac{x^2}{y^2}]^{3/2}} \right| = \left| \frac{-r^2}{(y^2+x^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{-r^2}{r^3} \right| = \frac{1}{r}$$

Örnek: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonu \mathbb{R} de türevlenebilir fonksiyondur. Fakat f' türev fonksiyonu 0 noktasında türevli değildir. (Yani reel değışkenli bir fonksiyonun 1. mertebeden türevi varsa 2. mertebeden türevinin olması gerekmez.)

Çözüm: $x > 0$ için $f'(x) = 3x^2$, $x < 0$ için $f'(x) = 2x$ dir. $f'(0)$ vardır. Çünkü

$$f'(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0$$

$$f'(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 - 0}{x} = 0 \quad \text{dir.}$$

$$f''(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{3x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} 3x = 0$$

$$f''(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} 2 = 2$$

$f'(0)$ yoktur. Çünkü

$$f''(0+) = 0 \neq 2 = f''(0-)$$

$f''(0)$ yoktur.

Diferansiyel Kavramı:

$f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x \in A$ noktasında türevli olsun. O zaman

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

yazılır. Böylece x in çok yakınlarında

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = 0$$

şeklinde yazılır. Bu durumdan

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

olur. Buradaki $f'(x) \cdot \Delta x$ ifadesine f fonksiyonunun x sabit noktasına ve değili'kenin Δx artımına göre diferansiyeli denir ve bu diferansiyel dy veya $df(x)$ ile gösterilir.

$y = f(x) = x$ alınır $y' = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow dy = dx$ olur.

Δx yerine dx yazılabilir. Böylece

$y = f(x)$ in diferansiyeli $\boxed{dy = f'(x) \cdot dx}$ yazılır.

Not: 1) Diferansiyel kullanılarak yaklaşık hesaplamalar yapılabilir: (veya hata hesaplamaları) -28-

x in çok yakınlarında $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x$

$$\Rightarrow \boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x} \text{ olur. } (\approx : \text{yaklaşık olarak eşit})$$

2) Türev alma kuralları diferansiyel içinde geçerlidir.

Örnek: Bir küpün bir ayrıntının uzunluğunu ölçsen biri, 0,001 cm hata ile ölçtüğünü söylemektedir. Küpün bir kenarı 20 cm olduğuna göre, küpün hacminde yapılan hata ne olur?

Çözüm: Küpün bir kenarının uzunluğu x cm olursa hacmi

$V = x^3 \text{ cm}^3$ olur. Hacimde yapılan hatayı ΔV ile gösterelim.

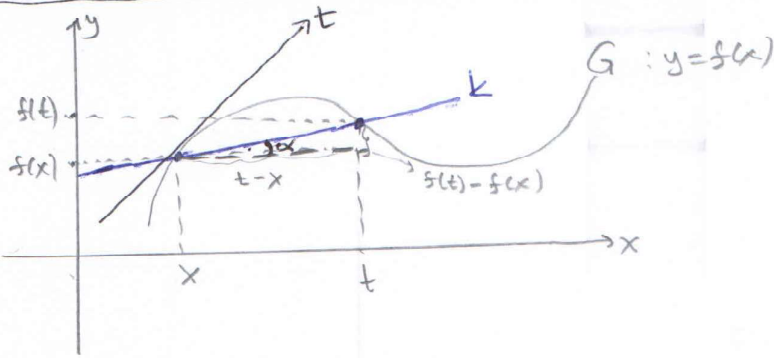
$\Delta V \approx V' \cdot \Delta x$ olduğundan, $\Delta V = 3x^2 \Delta x$ yazılır.

$x = 20 \text{ cm}$, $\Delta x = 0,001 \text{ cm}$ alınır,

$$\Delta V = 3 \cdot 400 \cdot 0,001 = 1,2 \text{ cm}^3$$

bulunur.

Türevin Geometrik Yorumu



$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli
fonksiyonu ve $x, t \in [a, b]$
noktaları verilsin. $y = f(t)$ 'nin
belirttiği eğri G olsun.
 f 'nin grafiği üzerindeki
 $(x, f(x)), (t, f(t))$ noktalarını
birleştiren k kirisinin eğimi

$m_k = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \tan \alpha$ dir. ($0 \leq \alpha < \pi$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$). f fonksiyonu x nok-

tasında türetili ise $f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$ dir. Bu durumda $t \rightarrow x$ için

bu k kirisinin, f 'nin $(x, f(x))$ noktasındaki t teğeti olarak

açıktır. Demekki $(x, f(x))$ noktasındaki teğetin eğimi $f'(x)$ dir.
 f 'nin G grafiğine $(x, f(x))$ noktasında çizilen t teğet doğrusunun
 m_t eğimi, f 'nin x noktasındaki türevine eşit olur. $m_t = f'(x)$

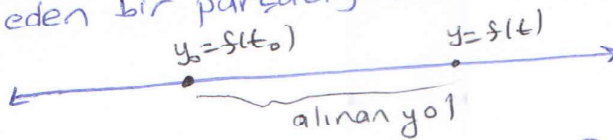
Buna göre $y = f(x)$ fonksiyonuna $(a, f(a))$ noktasında çizilen teğet
doğrunun denklemi $y - f(a) = m_t (x - a)$, $y - f(a) = f'(a) (x - a)$

normal doğrunun eğimi $m_n = -\frac{1}{m_t}$ olur, normal doğrunun denklemi $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)} (x - a)$

-29-

Türevin fiziksel yorumu:

Önce bir doğru üzerinde zamana bağlı olarak $y = f(t)$ denkleminde
göre hareket eden bir parçacığın t_0 anındaki hızını tanımlamaya
çalışalım:



t_0 anının yakınında bir t alırsak, parçacığın aldığı yol
 $f(t) - f(t_0)$ ve geçen süre $t - t_0$ dir. Buna göre t_0 dan t ye
geçen süre dilimindeki ortalama hız $\frac{y_0}{\text{zaman}} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ dir.
 t_0 anının yakınındaki her t için farklı ortalama hızlar elde
edebiliriz. Aradığımız t_0 anındaki hız olduğundan bu hızı $t \rightarrow t_0$
olmak üzere elde edilen tüm ortalama hızların $t \rightarrow t_0$ iken
limitlerini alarak, eğer varsa

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

tanımlayabiliriz gerekmektedir. Bu şekilde elde edilen hız
 $t = t_0$ anındaki "anlık hız" adını alacaktır. $v(t_0)$ ile gösterilir.

$$v(t_0) = f'(t_0) \text{ olur.}$$

örnekler:

1) $f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun $x_0 = \frac{1}{4}$ noktasındaki teğetlinin denklemini ve eğim açısını bulunuz.

Çözüm: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $m_T = f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = 1$ olur. $\tan \alpha = m_T = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

Teğet doğrunun denklemini $y - f(\frac{1}{4}) = 1 \cdot (x - \frac{1}{4})$, $y = x + \frac{1}{4}$ bulunur.

2) $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y = 6$ eğrisine $A(2,2)$ de teğet olan doğru denklemini yazınız.

Çözüm: $2x - 2y - 2xy' + 2yy' + 2 + y' = 0$, $y' = \frac{-2x + 2y - 2}{2y - 2x + 1} \Rightarrow y'(2) = \frac{-4 + 4 - 2}{4 - 4 + 1} = -2$

$m_T = f'(2) = -2$, $y - 2 = -2(x - 2)$ olur.

3) Bir hareketlinin t . saniyede aldığı yol $s = 2t + 3t^2 + t^3$ metredir. a) Bu hareketlinin 5. saniyedeki hızını bulunuz.

b) 3. saniyedeki ivmesini bulunuz.

Çözüm: $s(t) = 2t + 3t^2 + t^3$, $Hız = \frac{yol}{zaman}$, $v(5) = f'(5) =$

$s'(t) = 2 + 6t + 3t^2$, $v(5) = 2 + 6 \cdot 5 + 3 \cdot 25 = 107$

ivme $= s''(3) = (6 + 6t)|_{t=3} = 24$ olur.