

4.4. Minimum ve Maksimum Değerleri

Tanım: Her $x \in D_f$ için

$$m \leq f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = M$$

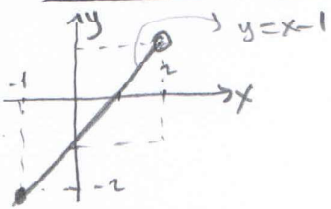
olarak şekilde $x_m, x_M \in D_f$ varsa bu noktalara sırasıyla f nin mutlak minimum, mutlak maksimum noktaları denir. m ve M sayılarına da mutlak minimum, mutlak maksimum değerleri denir.

Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve Ekstremum Değer Teoremine göre f nin mutlak min. ve mak. değerleri vardır. Bu nedenle mutlak ekstremum değerleri araştırılırken sorunlar genellikle kapalı aralıkta tanımlanamayan veya sürekli olmayan fonksiyonlara ilişkin olacaktır.

Tanım: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ verilsin. $c \in [a, b]$ olmak üzere

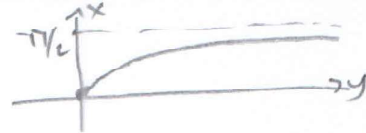
$\forall x \in B(c, \delta) \cap [a, b]$ için $f(x) \geq f(c)$ ($f(x) \leq f(c)$) koşulunu sağlayan bir $\delta > 0$ varsa (yani $B(c, \delta) = (c - \delta, c + \delta)$ komşuluğu varsa), f nin c noktasında yerel minimumu (yerel maksimumu) vardır denir. Bu durumda da $f(c)$ ye f nin yerel min. (yerel maks) değeri denir.

Örnekler: 1) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$



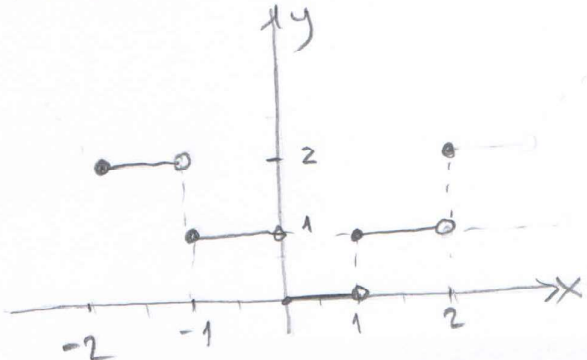
$f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve
sabit f nin $[-1, 2]$ de
mutlak maksimumu yoktur.
 $x_m = -1$, mutlak minimum
noktasıdır. $M = 2$, mutlak
minimum değeridir.

2) $f: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$



f sürekli ve mutlak
maks. nok. yoktur.
 $x_m = 0$ mut. min. nok. dir.

3) $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$



sonr. varsa mutlak ekst. bulalım.

f , $[-2, 2]$ de sürekli değildir.
Ancak $[0, 1)$ deki her nokta bir
mutlak minimum nokta,
 $[-2, -1) \cup \{2\}$ deki noktaların
her biri de mutlak maksimum
noktalardır.

Teorem: (Fermat Teoremi) $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $c \in (a,b)$ noktasında bir yerel minimum ya da bir yerel maksimuma sahipse ve f c noktasında türevli ise o zaman $f'(c)=0$ dir.

İspat: f , c noktasında yerel maksimuma sahip olsun. (Benzer şekilde yerel minimuma sahip olduğunda da ispat yapılır.)
 f , c noktasında türevli olduğundan

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

sonlu limiti vardır. O zaman $f'(c^+) = f'(c^-) = f'(c)$ olur.

c , f nin yerel maksimum noktası olduğundan

$$\forall x \in B(c, \delta) \cap [a,b] \text{ için } f(x) \leq f(c)$$

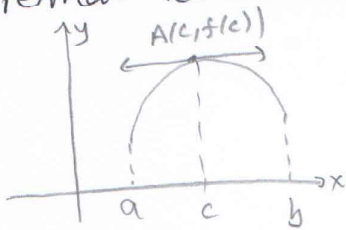
olacaktır. Buradan $\delta > 0$ vardır. Böylece

$$\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

olacaktır. Buradan

$$\left. \begin{array}{l} f'(c) \leq 0 \\ f'(c) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Fermat Teoreminin Geometrik Yorumu şöyledir:



f , $c \in (a,b)$ noktasında türevli ve bu noktada yerel ekst. sahipse, $A(c, f(c))$ noktasında $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x -eksenine paralel olur. (Çünkü $f'(c)=0$ dir. $\Rightarrow y - f(c) = f'(c)(x - c) \Rightarrow y = f(c)$)

Notlar: 1) Bu teoremin tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin $f(x)=x^3$ için $f'(0)=0$ dir fakat $x=0$ noktasında bir yerel ekstremum yoktur.

2) Yerel maks. veya yerel min. noktasında fonksiyon türevli ise türev sıfırdır. Fakat, fonksiyonun türevlenemediği bazı noktalarda yerel maks. veya yerel min. noktaları olabilir. Örneğin, $f(x)=|x|$ fonksiyonu $x=0$ da türevli değildir. Buna karşın f , $x=0$ da yerel min. değerini alır.

Tanım: Bir f fonksiyonunu belirlemek için önce aday olanları belirlememiz gerekir. Bunun için kritik noktalar adı verilen

- (1) $f'(x_0)=0$ olan x_0 noktaları
- (2) Birinci türevin var olmadığı noktalar (süreksizlik noktaları)
- (3) En az bir ucu kapalı aralıklarda sınırlıyorsa aralığın uç noktaları

noktalar da araştırmak gereklidir.

örnek: 1) $f(x)=x^3-2x^2-5x-6$ 2) $f(x)=e^x+x$

3) $g: (-3\pi, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x)=\sin x + x \cos x$

fonksiyonlarının kritik noktalarını bulunuz.
Çözüm: 1) $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-4x-5=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2 \pm \sqrt{34}}{3}$

2) $f'(x)=e^x+1=0 \Rightarrow e^x=-1$, kritik nokta yok

3) $g'(x)=\cos x - x \sin x = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$

$(-3\pi, \pi/2]$ aralığına düşenler

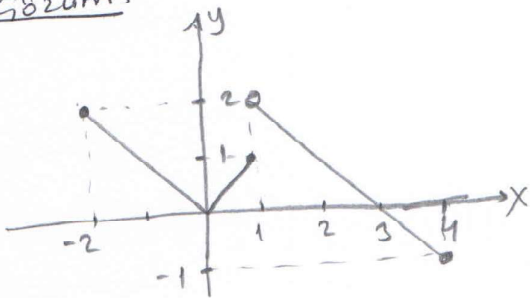
$$x_{-3} = -3\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{17\pi}{6}, x_{-2} = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6}, x_{-1} = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$$

$x_0 = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 3. türden kritik noktası $\pi/2$ dir.

4) $f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} |x|, & -2 \leq x \leq -1 \\ -x+3, & -1 < x \leq 4 \end{cases}$

kritik noktalarını ve yerel ekst. noktalarını belirleyiniz.

Çözüm:



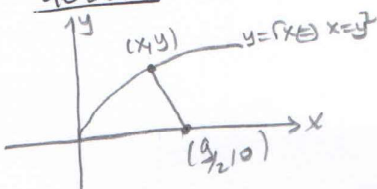
f fonksiyonu $x \neq 0, x \neq 1$ noktalarında türevlidir.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ -1, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

olur. $f'(x)=0$ olarak şekilde x_0 noktası yoktur.
2- türden kritik noktalar 0, 1
3- " " " -2, 4 dir.

5) $y=f(x)$ eğrisinin $(\frac{9}{2}, 0)$ noktasına olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm:



$(x, y) = (x, f(x))$ in $(\frac{9}{2}, 0)$ noktasına uzaklığı,
 $f(x) = \sqrt{(x-\frac{9}{2})^2 + (f(x)-0)^2}$ dir.

$$g(x) = [f(x)]^2 = (x-\frac{9}{2})^2 + x^2 \text{ olur.}$$

$g'(x) = 2(x-\frac{9}{2}) + 2x = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$ dir. 4 noktası f nin dolayısıyla da g nin kritik noktasıdır.

$g''(4) > 0$ old., g fonksiyonu 4 noktasında yerel min. sahiptir.
 $(x, f(x)) = (4, 2)$ min. nokta, $g(4) = (4-\frac{9}{2})^2 + 4 = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$ min. değer

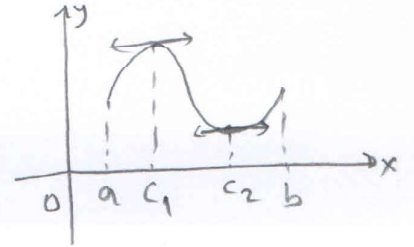
4.5. Rolle ve Ortalama Değer Teoremleri ve Uygulamaları

Teorem: (Rolle Teoremi) $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $[a,b]$ üzerinde türevli olsun. Eğer $f(a)=f(b)$ ise $f'(c)=0$ olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

İspatı: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan Ekstremum Değer Teoremine göre $[a,b]$ üzerinde en küçük m ve en büyük M değerlerine sahiptir. $m \leq M$ olduğundan ya $m=M$ dir ya da $m < M$ dir. $m=M$ durumunda fonksiyon sabit olur ki bu durumda $\forall c \in (a,b)$ için $f'(c)=0$ dir.

$m < M$ durumunda; $f(a)=f(b)$ olduğundan fonksiyon m ve M ekstremum değerlerini $[a,b]$ nin bitim noktalarında almaz. O zaman fonksiyon bu değerlerden en az birini $[a,b]$ nin bir $c \in (a,b)$ noktasında alır. c noktasında fonksiyon türevli olduğundan Fermat Teoremi gereği $f'(c)=0$ olur.

Rolle Teoremi'nin geometrik yorumu şöyledir: Teoremdaki koşullar sağlandığında böyle bir $c \in (a,b)$ noktası vardır ki $(c, f(c))$ noktasında $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet x eksenine paralel olur.



Teorem: (Ortalama Değer Teoremi, Lagrange Teoremi)

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebiliyorsa,

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$$

olacak şekilde bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

İspatı: $g(x) = f(a) - f(x) + \frac{x-a}{b-a} (f(b) - f(a))$

olarak tanımlı $g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ve (a,b) aralığında türevli olduğunu görmek kolaydır. Yine $g(a)=g(b)$ dir.

O halde Rolle Teoremine göre $g'(c)=0$ olacak şekilde $c \in (a,b)$ vardır.

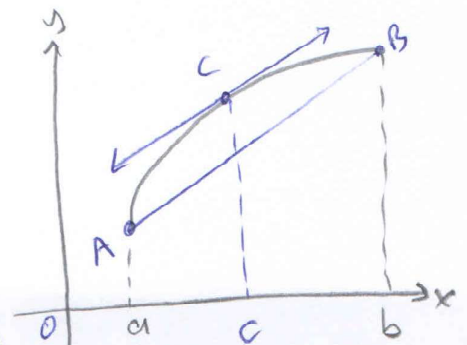
$$g'(x) = -f'(x) + \frac{1}{b-a} (f(b) - f(a))$$

$$\Rightarrow g'(c) = -f'(c) + \frac{1}{b-a} (f(b) - f(a)) = 0$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(c)$$

olur.

Lagrange Teoremi'nin geometrik yorumu şöyledir. Teoremdaki koşullar sağlandığında böyle bir $c \in (a,b)$ noktası vardır ki $(c, f(c))$ noktasından $y=f(x)$ fonksiyonun grafiğine çizilen teğet $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$ noktalarından geçen doğruya paralel olur.



(Çünkü $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$, eğimi aynı olandığından)

Ortalama Değer Teoreminin Sonuçları:

1) $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında türevi sıfır ise f sabittir.

2) a) $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve artandır \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \forall x \in [a,b]$ için $f'(x) \geq 0$ dir.

b) $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve azalandır \Leftrightarrow

$\forall x \in [a,b]$ için $f'(x) \leq 0$ dir.

İspat: 1) $\forall x \in [a,b]$ için, ortalama Değer Teoremine göre $a < c < b$ olmak üzere $f(x) - f(a) = (x-a) \cdot f'(c)$ yazılır. $f'(c) = 0$ old., $f(x) - f(a) = 0$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b]$ için $f(x) = \text{sabit}$ olur.

2) a) $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$ olsun. Ortalama Değer Teoremine göre $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(c)$ olacak şekilde $c \in (x_1, x_2)$ vardır.

$f, [a,b]$ de artandır ~~ve~~ sürekli'dir $\Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$
 $\Leftrightarrow (x_2 - x_1) \cdot f'(c) > 0 \Leftrightarrow f'(c) > 0$ olur.

$f, [a,b]$ de sürekli ve azalandır $\Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1)$

$$\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1) f'(c) < 0$$

$$\Leftrightarrow f'(c) < 0$$