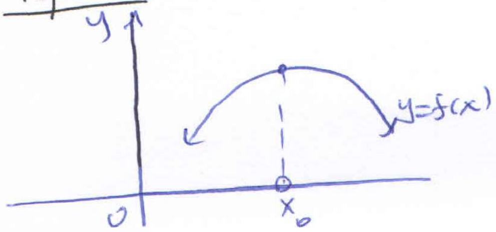
Önerme: (Birinci Türev Testi) f fonksiyonu ~~bir~~ I aralığının bir x_0 noktasında sürekli ve x_0 ın bir delik komşuluğunda türevlenebilir olsun. O zaman

(1) x_0 ın bir sol komşuluğunda $f'(x)>0$ ve x_0 ın bir sağ komşuluğunda $f'(x)<0$ ise x_0 noktası f nin bir yerel maks. noktasıdır.

(2) x_0 ın sol komşuluğunda $f'(x)<0$ ve x_0 ın sağ komşuluğunda $f'(x)>0$ ise x_0 noktası f nin bir yerel minimum noktasıdır.

(3) x_0 ın delik komşuluğunun tümünde $f'(x)>0$ ya da $f'(x)<0$ ise x_0 f nin bir yerel ekst. noktası olamaz.

İspat:



1)

x		x_0	
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$\nearrow$	mak.	$\searrow$

2)

x		x_0	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Tanım: (Ortalama Değer Teoreminin Genişletilmesi) (Taylor Açılımı)

~~Ortalama~~ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun türevi $[a,b]$ aralığında sürekli ve f' türev fonksiyonu (a,b) de türevli ise

$$f(b)=f(a)+f'(a)\cdot(b-a)+\frac{1}{2}\cdot f''(c_2)\cdot(b-a)^2$$

olacak şekilde $c_2\in(a,b)$ vardır.

Bu ifadeyi n. türeve kadar sürdürecek olursak,

$$f(x)=f(a)+\frac{1}{1!}f'(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f''(a)\cdot(x-a)^2+\frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3+\dots+$$

$$+\frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(c_n)\cdot(x-a)^n$$

elde edilir. Buna f nin a noktası komşuluğundaki Taylor Açılımı denir.

$a=0$ için olan Taylor Açılımına Mac Laurin Açılımı denir.

n. dereceden $P_n(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\dots+b_nx^n$ polinomunun

Taylor Formülü

$$\boxed{P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$ dir.

Teorem: (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi veya Cauchy Teoremi)
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a,b]$ üzerinde sürekli, (a,b) de türevli ise bu durumda

$$[f(b)-f(a)] . g'(c) = [g(b)-g(a)] . f'(c)$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a,b)$ noktası vardır.

İspat: $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = [f(b)-f(a)] . g(x) - [g(b)-g(a)] . f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli, (a,b) de türevlidir. Ayrıca

$$F(a) = F(b) = f(b). g(a) - f(a). g(b)$$

olduğundan Rolle Teoremi gereğince $F'(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (a,b)$ vardır. Böylece $F'(x) = [f(b)-f(a)] . g'(x) - [g(b)-g(a)] . f'(x) \Rightarrow$

$$F'(x) = [f(b)-f(a)] . g'(x) - [g(b)-g(a)] . f'(c) = 0 \quad \text{o.ş. } c \in (a,b) \text{ vardır}$$

$$[f(b)-f(a)] . g'(c) - [g(b)-g(a)] . f'(c) \quad \text{o.ş. } c \in (a,b) \text{ vardır.}$$

Not: $g'(x) \neq 0$ ise $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ o.ş. $c \in (a,b)$ vardır.

θ sayısı için $c = a + \theta(b-a)$ olacağından $0 < \theta < 1$ koşulunu sağlayan

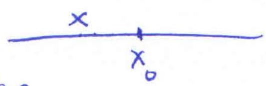
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ yazılır.}$$

-36-

Önerme: (ikinci türev testi)
f, (a,b) aralığında türevlenebilir ve $x_0 \in (a,b)$ için $f'(x_0) = 0$ olsun. Bu durumda

(1) $f''(x_0) > 0$ ise x_0, f nin yerel minimum noktasıdır.
(2) $f''(x_0) < 0$ ise x_0, f nin yerel maksimum noktasıdır.

İspat: (1) x, x_0 ın sol komşuluğunda olsun.



$x < x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$, azalan

$x > x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ ~~azalan~~ artan

Birinci türev testine göre x_0, f nin yerel minimum noktasıdır.
(2) Aynı şekilde yapılır.