4.4 ve 4.5 çözümlü örnekler!

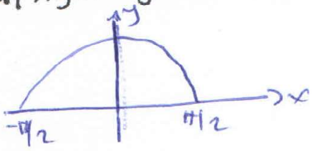
1) $f(x)=4x^3-5x^2+x-2$ fonksiyonu için $f(2)-f(0)=2.f'(c)$ olacak şekilde $c\in(0,2)$ sayısını bulunuz.

Çözüm: $f(2)=12$, $f(0)=-2$, $f'(x)=12x^2-10x+1$

$14=2(12c^2-10c+1) \Rightarrow 12c^2-10c+1=0 \Rightarrow c_{1,2}=\frac{5\mp\sqrt{97}}{12}$

$c_1=\frac{5+\sqrt{97}}{12}\in(0,2)$, $c_2=\frac{5-\sqrt{97}}{12}\notin(0,2)$ dır. $c=c_1$ olur.

2) $f(x)=\cos x$ fonksiyonunun $x=0$ da yerel ekstremum değerine ulaştığını gösteriniz.



$f'(x)=-\sin x$

$x\in(-\pi/4,0)$ için $f'(x)=-\sin x>0$
$x\in(0,\pi/4)$ için $f'(x)=-\sin x<0$

old. f, $x_0=0$ da yerel maks. sahip

3) $f(x)=\cos x+\sin x$ ekst. nok. bulalım:

$f'(x)=-\sin x+\cos x=0 \Rightarrow x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$

$f''(x)=-\cos x-\sin x$

$f''(\pi/4)=-\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}$

$=-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}<0$

$\Rightarrow x=\pi/4$ yerel maks nok.

$f''(5\pi/4)=-\cos\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4}=-\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$=2\frac{\sqrt2}{2}=\sqrt2>0$,

$x_2=\frac{5\pi}{4}$ yerel min.

4) Her $x\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ için $\sin x<x$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $0\le x\le 2\pi$ için $\sin x$ sürekli, $(0,2\pi)$ de türevli

Ortalama Değer Teoremine göre $f(x)=\sin x$, $[0,x]\subset[0,2\pi]$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sin x}{x}=f'(c)$ olacak şekilde en az bir $c\in(0,x)$ vardır.

$f'(x)=\cos x$, $f'(c)=\cos c$ old., $\cos c<1$ olur.

(≤ 1 değil çünkü cosinüsün sıfır olduğu yer 1 dir. 0 da açık aralık)

$\frac{\sin x}{x}<1 \Rightarrow \sin x<x$ olur.

5) Her $-1\le x<0$ için $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ dir!

Çözüm: $f(x)=\sqrt{1+x}$ f, $[-1,x]$ de ya da $[x,0]$ da sürekli, $(-1,x)$ yada $(x,0)$ açık aralıkta türevlidir. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ olur.

$[x,0]$ aralığı düşünülür ise;

$\frac{f(0)-f(x)}{-x+0}=f'(d)$ o.ş. $d\in(x,0)$ vardır.

$\frac{1-\sqrt{1+x}}{-x}=\frac{1}{2\sqrt{1+d}}>\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{1+x}}{x}<\frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$ olur.

istenilen eşitsizlik bulunur.

$[-1,x]$ aralığı düşünülür ise;

$\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(c)$ o.ş. $c\in(-1,x)$ vardır.

$-1<c<0$
$0<c+1<1$
$0<\sqrt{c+1}<1$
$\frac{1}{\sqrt{c+1}}>1$

$\frac{\sqrt{1+x}}{x+1}=\frac{1}{2\sqrt{c+1}}>\frac{1}{2}$ dir.

$\sqrt{x+1}>\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$

istenilen eşitsizlik değil.

6) $\forall x \in \mathbb{R}^+$ için $1-\frac{x^2}{2} < \cos x$ doğru olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=x^2$

f ve g $[0,x]$ de sürekli, $(0,x)$ de türevli

GODT göre $\exists c \in (0,x)$ öyle ki $\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow$

$$\frac{1-\cos x-(1-\cos 0)}{\frac{x^2}{2}-0} = \frac{\sin c}{c} \Rightarrow \frac{1-\cos x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{\sin c}{c} < 1$$ dir. ($\sin x < x$ idi)

$1-\cos x < \frac{x^2}{2} \Rightarrow 1-\frac{x^2}{2} < \cos x$ olur.

7) $f(x)=3\sin x$, $g(x)=\cos x$ fonksiyonuna $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ de Cauchy Ortalama Değer Teoremi (GODT) uygulanabilir mi?

Çözüm: f,g fonksiyonları $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ de sürekli, $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$ de türevlidir.

$g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$f'(x)=3\cos x$, $g'(x)=-\sin x$,

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{3\cos c}{-\sin c} = \frac{3\sin\frac{\pi}{3}-3\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -3$$

$\Rightarrow 3\cos c = 3\sin c \Rightarrow \cos c = \sin c \Rightarrow \boxed{c=\frac{\pi}{4}}$

8) a) $f(x)=\sin x$
b) $g(x)=4-x^2$
fonksiyonlarının artan azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm: $f'(x)=\cos x$ $f'(x)>0$ olan $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ dır.

Dolayısıyla f, bu aralıklarda artandır.

$g'(x)=-2x$, $\forall x\in(-\infty,0)$ için $f'(x)>0 \Rightarrow f$ artan

$\forall x\in(0,\infty)$ için $f'(x)<0 \Rightarrow f$ azalandır.

9) Her $x\in[a,b]$ için $f'(x)=g'(x)$ ise $f(x)=g(x)+c$ dir, göst.

Çözüm: $\forall x\in[a,b]$ için $f'(x)=g'(x) \Rightarrow f'(x)-g'(x)=0 \Rightarrow (f(x)-g(x))'=0$

Türevi sıfır olan fonksiyon sabit olduğundan $f(x)-g(x)=c$

$\Rightarrow f(x)=g(x)+c$ olur.

10) f fonksiyonu $f(0)=3$ ve $\forall x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)\le 5$ özelliğindeki bir fonksiyon olmak üzere $f(3)$ değerinin en fazla ne olabileceğini O.D.T. kullanarak bulunuz.

Çözüm: $f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{f(3)-3}{3}$ o.ş. $\exists c\in(0,3)$ var. $f'(x)\le 5$ kullanılırsa

$3f'(c)=f(3)-3 \Rightarrow f(3)=3f'(c)+3$,

$f(3)\le 3.5+3=18$, $f(3)\le 18$ dir.

4.6. Eğrilerin bükeyliği, L'Hospital Kuralı, Asimptotlar

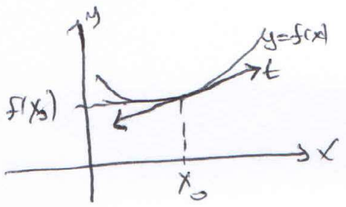
Yerel ekstremum noktalarını bulmada kullanılan "bükeylik" kavramı ilerde eğri çizimlerinde de kullanılacaktır.

Tanım: x_0 da türevlenebilen bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin.

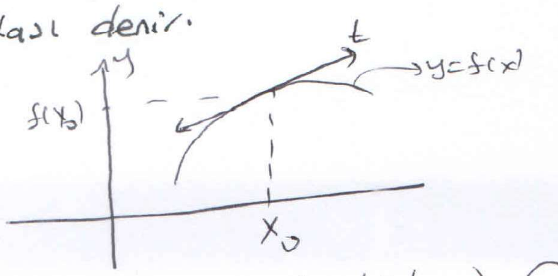
1) x_0 ın bir delik komşuluğunda f nin grafiği $(x_0, f(x_0))$ noktasında eğriye çizilen teğetin üstünde kalıyorsa, f ye x_0 noktasında yukarı doğru bükeydir (iç bükey, konveks) denir.

2) x_0 ın delik komşuluğunda f nin grafiği $(x_0, f(x_0))$ noktasında eğriye çizilen teğetin altında kalıyorsa f ye x_0 da aşağı doğru bükeydir (dış bükey, kontav) denir.

3) Eğrinin iç bükeyliğini dış bükeylikten ayıran noktaya büküm (dönüm) noktası denir.



Konveks (iç bükey) $\cup$



kontav (dış bükey) $\cap$

Genel olarak I aralığının uç noktası olmayan tüm noktalarında f fonksiyonu yukarı (veya aşağı) doğru bükeyse, f I aralığında yukarı (aşağı) bükeydir denilir. $f(x)=x^2$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ da yukarı doğru bükeydir.

Aşağıdaki önerme bükeyliği karakterize eder.

Önerme: (a,b) aralığında $f(x)$ fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi var ve bu aralığın tüm noktalarında $f''(x)>0$ ise f, (a,b) de iç bükeydir. ($\cup$) $f''(x)<0$ ise f, (a,b) de dış bükeydir. $\cap$

İspat: (a,b) aralığında $f''(x)>0$ olsun. Keyfi $x_0\in(a,b)$ noktası alınsın. $y=f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktası komşuluğunda $n=2$ için Taylor formülü

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)}_{y}+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2$$

olacak şekilde $c=x_0+\theta(x-x_0)$, $0<\theta<1$ vardır. $y=f(x)$ ~~doğrusuna~~ eğrisine $(x_0,f(x_0))$ noktasında çizilen teğet doğrunun denklemi

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) \text{ dır.}$$

$$f(x)-y=\frac{f''(c)}{2!}(x-x_0)^2, \quad f''(c)>0,\ (x-x_0)^2>0 \text{ old.)}$$

$f(x)-y>0$ dır. $\Rightarrow$ $\underset{\text{fonk.}}{f(x)} > \underset{\text{teğet doğru}}{y}$ dir. $\Rightarrow$ eğri, teğet doğrunun üstünde kalır. $\Rightarrow$ Tanım gereği iç bükey olur.

Sonuç: $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında 2. mertebeden türevi varsa ve (x_0, y_0) noktası f nin büküm noktası ise $f''(x_0)=0$ dır. Fakat tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek: $f(x)=x^4$

Örnek: $f(x)=x^6-x^4$ fonksiyonunun bükeyliğini araştıralım.

$f'(x)=6x^5-4x^3$, $f''(x)=30x^4-12x^2$

$f''(x)=0 \Rightarrow 30x^2\left(x^2-\frac{12}{30}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$, $x_2=\sqrt{\frac{2}{5}}$, $x_3=-\sqrt{\frac{2}{5}}$

x		$-\sqrt{2/5}$		0		$\sqrt{\frac{2}{5}}$	
$30x^2$	+		+	0	+		+
$x^2-\frac{12}{30}$	+	0	−		−	0	+
$f''(x)$	+		−		−		+
$f(x)$	∪		∩		∩		∪

iç bükey dış bükey

x_2, x_3 noktaları büküm nok.

ödev: Aşağıda verilen fonksiyonların bükeyliklerini araştırınız.

1) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=a^x$, $a \in \mathbb{R}_+ - \{1\}$
3) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $f(x)=\log_a x$
4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$
5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x)=\cosh x$
$g(x)=\sinh x$

L'HOSPİTAL KURALI

$\overline{\mathbb{R}}$ Gerçel sayılar kümesinde $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0.\infty$ ifadelerine belirsiz biçimler demiştik. Bunlardan başka, $0^0, 1^\infty, \infty^0$ ifadeleri de belirsiz biçimlerdir. Bu belirsiz biçimlerin hepsi $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ biçimine dönüştürülerek limit değerleri hesaplanabilir. Bunlarla ilgili L'Hospital Teoremini verelim.

Teorem: (1. L'Hospital Kuralı, $\frac{0}{0}$ Belirsizlik hali) f ve g fonksiyonları (1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0=\lim\limits_{x\to a} g(x)$

(2) f ve g a noktasının uygun bir komşuluğunda türevli ve $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti var

koşullarını sağlıyor ise bu durumda $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$ dır.

İspat: $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases}$, $G(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq a \\ 0, & x=a \end{cases}$ fonksiyonları tanımlansın. a nın komşuluğunda F ve G fonksiyonları türevli ve $F'(x)=f'(x)$, $G'(x)=g'(x)$ dir. G.O.D.T. nin koşulları $\lim\limits_{x\to a}F(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}G(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ dır. $[a,x]$ aralığında sağlanır.

Böylece $\dfrac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \dfrac{F'(c)}{G'(c)} \Leftrightarrow \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \Leftrightarrow$

olacak biçimde $c \in (a,x)$ noktası vardır. $x \to a \Leftrightarrow c \to a$ dır.

Hipoteze göre $\lim\limits_{c\to a} \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ limiti var olduğundan $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

limiti de vardır ve birbirine eşittir.

Not: L'Hospital kuralı $x\to a^+$, $x \to a^-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$ de doğrudur.

Çözümlü Örnekler:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = ?$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \arctan x = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x$ $\left[\frac{0}{0}\right]$ hali

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$

2) $$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\pi/2} \frac{-\sin x}{-8x} = \frac{\sin \pi/2}{8\cdot\pi/2} = \frac{1}{4\pi}$$

3) $$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{x^2}{(x-1)^2}\right) = 1.1 = 1$$

4) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{3x^3-7x^2+5x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{9x^2-14x+5} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{18x-14} = 3/2$$

5) $$\lim_{x\to\infty} x\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsec} x\right) = \infty\cdot 0 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arcsec} x}{1/x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 1$$

6) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x} = \frac{1}{4}\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} = \frac{1}{4}.0 = 0$$

Not: L'Hospital kuralları her zaman sonuç vermeyebilir. Örneğin

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ limiti mevcut olmadığı için

L'Hospital kuralından yararlanamayız. Uygun işlemlerle

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\sin x}{x+\sin x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$ dir.

7) $$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{-1/x^2\cdot e^{1/x} + \frac{1}{x^2}\cdot e^{-1/x}}{\frac{-1/x^2}{1+\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(e^{1/x}+e^{-1/x}\right)$$

$$= 2$$

$\infty^0, 0^0, 1^\infty$ Belirsizlik durumları

8) $\lim_{x\to 0^+} x^x = 0^0$, $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x$

$\lim_{x\to 0} \ln y = \ln \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} x \cdot \ln x = 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0$

$\ln \lim_{x\to 0} y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$ dir.

9) $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1^\infty = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} = \frac{0}{0}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$

$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$

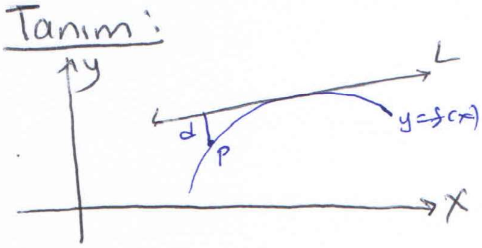
10) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)^x = \infty^0 = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^x} = \frac{1}{\lim_{x\to 0} x^x} = \frac{1}{1} = 1$

Not: Bazen de L'Hospital kuralı işlemi uzatabilir.

$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x}{\tan x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x \cdot \tan x}{1+\tan^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sec x \cdot \tan^2 x + \sec x \cdot (1+\tan^2 x)}{2\tan x \cdot (1+\tan^2 x)} = \cdots$

ASİMPTOTLAR:

Tanım:



$P(x, f(x))$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi bir nokta ve L herhangi bir doğru olmak üzere, d P noktasının L doğrusuna uzaklığını göstersin. Eğer $x \to \infty$ için $d \to 0$ ise L doğrusuna f nin grafiğinin doğrusal asimptotu denir.

Tanımdaki L doğrusu yerine bir eğri de alınabilir, bu durumda L eğrisine f nin grafiğinin eğrisel asimptotu denir. Asimptotlar düşey ve yatay-eğik-eğrisel olmak üzere iki grupta incelenir.

Tanım: Eğer $\lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$ ya da $\lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty$ ise $x = a$ doğrusuna f nin düşey asimptotu denir.

- Fonksiyonların grafikleri düşey asimptotları kesmez.
- Bir fonksiyonun grafiğinin birden fazla düşey asimptotu olabilir.
- Bir fonksiyonun düşey asimptotunun olduğu noktalar fonksiyonun sonsuz sıçramalı süreksizlik noktalarıdır.

Örnek; $x=0$ doğrusu $y=x^{-2/3}$ ve $y=\log_a x$ fonksiyonlarının, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ doğruları $y=\tan x$ fonksiyonunun, $x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ doğruları da $y=\cot x$ fonksiyonunun düşey asimptotlarıdır.

Not: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ ise bu eğrinin düşey asimptotları genel de $Q(x)=0$ yapan değerlerde aranır. $Q(a)=0$, $P(a)\neq 0$ ise $\lim_{x\to a} f(x)$ incelenir. Eğer bu limit sonlu bir sayı ise veya yoksa $x=a$ düşey asimptot olamaz.

Örnek: 1) $f(x)=\frac{x-1}{x^2-1}$ düşey asimptotunu arayalım:

$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\mp 1$, $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=1$ düşey asimptot değil.

$x=-1$ için $P(-1)=-2\neq 0$, $Q(-1)=0$ old., $x=-1$ düşey asimptottur.

2) $f(x)=2^{\frac{5}{x-1}}$

$\lim_{x\to 1^-} 2^{\frac{5}{x-1}}=2^{-\infty}=0$, $\lim_{x\to 1^+} 2^{\frac{5}{x-1}}=\infty$ old., $x=1$ düşey asimptotdur.

yatay asimptot:

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=b$ ise $y=b$ doğrusuna yatay asimptot denir.

Eğik Asimptot:

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m_1$ ve $\lim_{x\to\infty}[f(x)-m_1 x]=k_1$ limitleri varsa ve bu limitler reel ise $y=m_1x+k_1$ doğrusuna 1. eğik asimptot denir.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m_2$, $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-m_2x]=k_2$ limitleri var ise $y=m_2x+k_2$ doğrusuna 2. eğik asimptot denir. $m_1=0$, ya da $m_2=0$ ise yatay asimptot elde edilir.

Not: 1) $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\operatorname{der}P=1+\operatorname{der}Q$ ise $y=f(x)$ in eğik asimptotu vardır. Bu eğik asimptot $P(x)$ polinomunu $Q(x)$ e bölerek

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & B(x) \\ \overline{K(x)} & \end{array}$$

$y=B(x)$ eğik asimptotdur.

2) $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, $\operatorname{der}P\geq 2+\operatorname{der}Q$ ise f nin eğri asimptotu vardır.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \hline & C(x) \\ \overline{K(x)} & \end{array}$$

$y=C(x)$ eğri asimptot olur.

örnekler: 1) $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x}=0 \Rightarrow y=0$ yatay asimptot.

2) $\lim_{x\to\mp\infty} \arctan x=\mp\frac{\pi}{2}$ old., $y=\mp\frac{\pi}{2}$ yatay asimptot

3) $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arccot} x=0$, $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arccot} x=\pi$ old, $y=0, y=\pi$ yatay A.

4) $y=0$ doğrusu $a>1$ ve $0<a<1$ durumlarında, sırasıyla $x\to-\infty$ ve $x\to+\infty$ iken $y=a^x$ fonksiyonunun yatay asimptotudur.

5) $f(x)=\frac{4x^4}{4x^2-1}$ asimptotlarını araştıralım:

$4x^2-1=0 \Rightarrow x=\mp 1/2$, $4x_0^4\neq 0$ olduğundan $x=\mp 1/2$ düşey asim.

$$\begin{array}{r|l} 4x^4 & 4x^2-1 \\ \mp 4x^4 \pm x^2 & x^2+\frac{1}{4} \\ \hline x^2 & \\ \mp x^2 \pm \frac{1}{4} & \\ \hline 1/4 & \end{array}$$

$y=x^2+\frac{1}{4}$ eğri asimptot dur.

6) $y=\frac{2x}{x+1}$, $\lim_{x\to-1^-} \frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to-1^-} \frac{2}{-1+1}=+\infty$, $\lim_{x\to-1^+} \frac{2x}{x+1}=-\infty$ olduğundan $x=-1$ düşey asimptot olur. $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{2x}{x+1}=2$ old. $y=2$ yatay asimptot.

7) $y=2x.\arctan x$ in eğik asimptotunu bulalım:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty} 2\arctan x=2.\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty} 2.\arctan x=-2.\frac{\pi}{2}=-\pi$$

$$\lim_{x\to+\infty} (2x.\arctan x-\pi x)=\lim_{x\to+\infty} 2x\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)=2\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x-\pi/2}{\frac{1}{x}}$$

$$=2.\lim_{x\to+\infty} \frac{1/1+x^2}{-1/x^2}=-2.\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}=-2$$

$\boxed{y_1=\pi.x-2}$ 1. Eğik Asimptot

$$\lim_{x\to-\infty} [2x\arctan x+\pi x]=\lim_{x\to-\infty} \frac{2\arctan x+\pi}{1/x}=\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{-1/x^2}=-2$$

$\boxed{y_2=-\pi x-2}$ 2. Eğik Asimptot.