4.7. Grafik Çizimleri:

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar izlenir.

- Fonksiyonun D_f tanım kümesi bulunur.
- Fonksiyonun karakteristik özellikleri bulunur. Eksenleri kestiği noktalar, peryodikliği, simetrikliği
- Eğer varsa asimptotları incelenir.
- Birinci türevin işareti incelenerek fonksiyonun monotonluk aralıkları ve ekstremum noktaları bulunur.
- İkinci türevin işareti incelenerek büteylik durumuna bakılır.
- Tüm bilgiler x, $y=f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ lerin sıralandığı bir tabloda toplanır ve bu tabloya göre fonksiyonun grafiği çizilir.

Örnekler: 1) $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ 2) $f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)$

fonksiyonlarının değişimini inceleyip, grafiklerini çizinin.

① $y=f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$ fonksiyonunun değişimini inceleyip grafiğini çizelim:

- $x-2=0 \Rightarrow x=0$, $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$
- $y=0$ ise $x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0$
  $(1,0)$, $(-2,0)$ eksenleri kestiği noktalar
- $x=2$ düşey asimptot
- $f'(x)=\dfrac{(2x+1)\cdot(x-2)-1\cdot(x^2+x-2)}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$
- $f''(x)=\dfrac{8}{(x-2)^3}$

x		2	
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=4$

$f''(0)=-1<0$ $x=0$ yerel maks.

$f''(4)=1>0$ $x=4$ yerel min.

x		0		4	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$ için f artan

$x\in(0,4)$ için f azalan

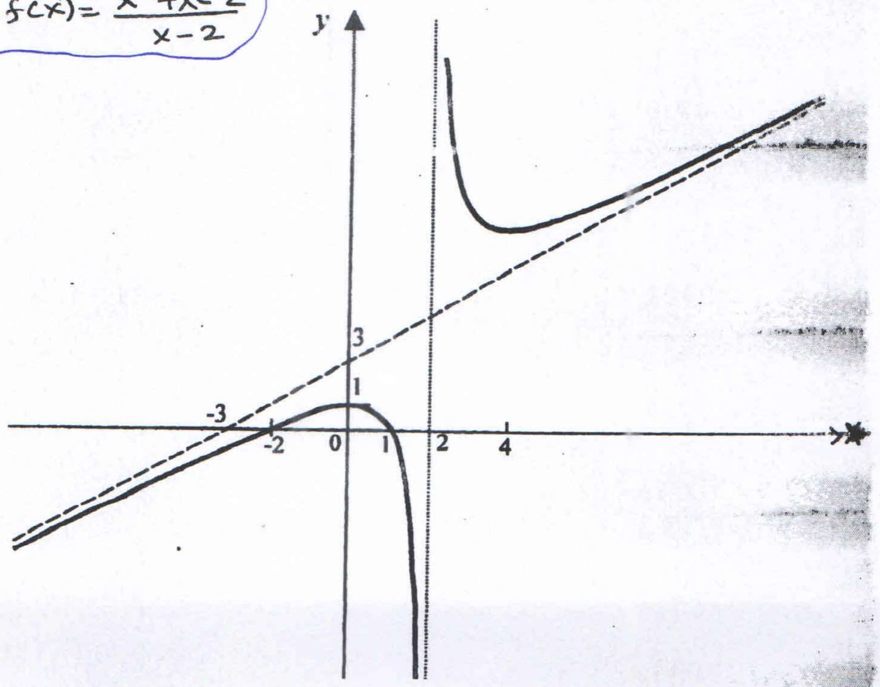
- Polinomlarda bölme işlemini yaparak yatay asimptotumu bulalım.

$\dfrac{x^2+x-2}{x-2}=(x+3)+\dfrac{4}{x-2}$

$y=x+3$ ~~yatay~~ eğik asimptot

- $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=\mp\infty$ old. yatay asimptot yok

$$y=f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-2}$$



olarak çizilebilir. •

② $y=f(x)=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$

· $D_f=\left\{x\in\mathbb{R};\ \left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right|\le 1\right\}=\mathbb{R}$

· f, $\mathbb{R}$ de sürekli, $x=0 \Leftrightarrow y=0$
(0,0) noktasından geçer
tek fonksiyondur. Dolayısıyla
orjine göre simetriktir.
$x>0$ için $f(x)>0$ dır.

· f sürekli olduğundan düşey
asimptotu yoktur.

$\lim_{x\to\pm} f(x)=0 \Rightarrow \underline{y=0}$ yatay asimptot

· $f'(x)=\dfrac{\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}=\dfrac{2\cdot(1-x^2)}{(1+x^2)\cdot|1-x^2|}=\mp\dfrac{2}{1+x^2}$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x)=1$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=-1$ f, $x=1$ de türevlenemez.

$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ kümesi üzerinde $f'(x)<0 \Rightarrow f$ azalan

$(-1,1)$ de $f'(x)>0 \Rightarrow f$ artan.

$(-1,-\frac{\pi}{2})$ noktası f nin yerel minimum,

$(1,\pi/2)$ '' f nin yerel maks. noktasıdır.

$$f''(x)=\mp\frac{-2x\cdot 2}{(1+x^2)^2}=\mp\frac{-4x}{(1+x^2)^2}=\frac{-4x\ \mathrm{sgn}(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$1-x^2$	−	0	+		+	0	−
$-4x$	+		+	0	−		−
f''	− ∩		+ ∪		− ∩		+ ∪

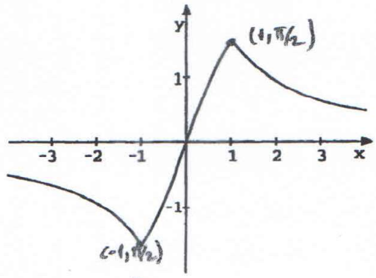
· $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ de $f''(x)<0$ dolayısıyla kolları aşağı doğru

· $(-1,0)\cup(1,\infty)$ da $f''(x)>0 \Rightarrow \cup$

$(0,0)$, $(-1,-\frac{\pi}{2})$, $(1,\frac{\pi}{2})$ büküm noktaları

6. Buna göre fonksiyonun değişim tablosu ve grafiği aşağıdaki gibidir.

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$-$	|		$+$		|	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0
$f''(x)$		$-$	|	$+$	0	$-$	|	$+$	
		$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$	



$f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$ *fonksiyonunun grafiği*

$f(x) = x^2e^{-x}$ fonksiyonunun grafiği:

3) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)$

- $D_f = \{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{2-x} > 0\} = (1,2)$
- $y=0$ için $0 = \ln\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right) \Rightarrow e^0 = e^{\frac{x-1}{2-x}}$

$\Rightarrow 1 = \dfrac{x-1}{2-x} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

x eksenini $(\frac{3}{2}, 0)$ noktasında keser.

- $x=1$ ve $x=2$ düşey asimptottur.

Bu noktalar civarında fonksiyonun davranışı

$\lim\limits_{x\to 1^+} \ln\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right) = +\infty$

Diğer asimptotlar yok

- $f(x) = \ln(x-1) - \ln(2-x) \Rightarrow$

$f'(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{1}{(x-1)\cdot(x-2)}$

$x \in (1,2)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f artandır.

f'' ihmal edilebilir.

x	Tanımlı değil 1		2 Tanımlı değil
$f'(x)$	Tanımlı değil	$+$	
$f(x)$	d.a $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ d.a

$y = \ln\left(\dfrac{x-1}{2-x}\right)$