

5. BÖLÜM: İNTEGRAL VE UYGULAMALARI

Bu bölümde kabaca türev alma işleminin tersi olarak da düşünülebilecek olan, integral alma işlemi tanıtılacak ve integral hesaplama teknikleri verilecektir.

5.1. Belirsiz Integral ve Özellikleri:

Tanımlar

$y = f(x)$ denklemi ile verilen f fonksiyonunun $x \in \mathbb{R}$ için diferansiyelinin,

$$dy = f'(x) dx$$

olduğunu gördük. x noktasında türevi $f'(x)$ olan fonksiyon c herhangi bir sabit olmak üzere $f(x) + c$ dir. Bu matematikte

$\int f'(x) \cdot dx = f(x) + c$ şeklinde ifade edilir.

f nin tanım aralığındaki her x noktasında

$$F'(x) = f(x)$$

oluyorsa, $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun ters türevi (anti türevi) veya bir ilkeli denir. f nin bütün ters türevlerinin kümesi

$\int f(x) dx$ ile gösterilir ve buna f nin belirsiz integrali denir.

\int sembolü integral işaretidir. f fonksiyonunun integralin integrandı,
 x ise integrasyon değişkenidir. c de integral sabiti adını alır.

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

yazılır. $\int f'(x) dx = f(x) + c$ eşitliğinin her iki yanının diferansiyeli alınır, $d(\int f'(x) dx) = f'(x) dx$ olur. Bu ise integral alma ile diferansiyel alma işlemlerinin birbirinin tersi olduğunu gösterir.

Belirsiz integral aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$1) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \quad \text{veya} \quad d\left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$$

$$2) \int dF(x) = F(x) + c$$

$$3) \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$4) \forall \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \int [\alpha \cdot f(x)] dx = \alpha \cdot \int f(x) dx$$

$$5) \exists \mathbb{C} \text{ aralığında } F'(x) = f(x) \text{ ise } a \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

İspatı kolay

Geometrik olarak bir belirsiz integral, birbirine paralel eğrilerin bir ailesidir.

Temel integral formülleri

$$1) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$3) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$$

$$4) \int e^x dx = e^x + C$$

$$5) \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$6) \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$7) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z})$$

$$8) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$$

$$9) \int \sinh x dx = \cosh x + C, 10) \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$11) \int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C$$

$$12) \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

$$13) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -\operatorname{arccot} x + C$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsinh} x + C = -\operatorname{arccos} x + C$$

$$15) \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$16) \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C = \operatorname{Arcsinh} x + C$$

$$17) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C = \operatorname{Arccosh} x + C$$

$$18) \int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$$

$$19) \int \operatorname{cosec} x \cdot \cot x dx = -\operatorname{cosec} x + C$$

$$20) \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$21) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C = -\operatorname{arccosec} x + C$$

5.1. Örnekler:

$$1) \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$2) \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$$

$$3) \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$4) \int \frac{2x^4 - 5x \cdot \sqrt[4]{x} + 3}{x} dx = \int \left(2x^3 - 5x^{1/4} + \frac{3}{x} \right) dx \\ = 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^{1/4+1}}{1/4+1} + 3 \cdot \ln|x| + C \\ = \frac{x^4}{2} - 4 \cdot x^{5/4} + 3 \ln|x| + C$$

$$5) \int \frac{1}{2}(1 - \cos x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$$

$$6) \int (3^x + 5^x)^2 dx = \int (3^{2x} + 2 \cdot 3^x \cdot 5^x + 5^{2x}) dx = \\ = \int 9^x dx + 2 \cdot \int 15^x dx + \int 25^x dx \\ = \frac{9^x}{\ln 9} + 2 \cdot \frac{15^x}{\ln 15} + \frac{25^x}{\ln 25} + C$$

$$7) \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$$

$$8) \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \\ = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \frac{\sin 2x}{2} + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$9) \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \\ = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

5.1. Ödev problemleri:

a) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1) $\int (3t^2 + \frac{t}{2}) dt$

2) $\int x^{-1/3} dx$

3) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$

4) $\int (8y - \frac{2}{y^{1/4}}) dy$

5) $\int \frac{t(t + \sqrt{t})}{t^2} dt$

6) $\int 7 \cdot \sin \frac{\theta}{3} d\theta$

7) $\int (-3 \cdot \csc^2 x) dx$

8) $\int (4 \cdot \sec x \cdot \tan x - 2 \sec^2 x) dx$

9) $\int \frac{1}{2} (\csc^2 x - \csc x \cdot \cot x) dx$

10) $\int \cot^2 x dx$

11) $\int \cos \theta \cdot (\tan \theta + \sec \theta) d\theta$

12) $\int \frac{\csc \theta}{\csc \theta - \sin \theta} d\theta$

13) $f(x) = \frac{1}{dx} (1 - \sqrt{x})$ ve $g(x) = \frac{1}{dx} (x + 2)$

olmak üzere aşağıdaki ifadeleri bulunuz.

$\int f(x) dx$, $\int g(x) dx$, $\int [-f(x)] dx$,

$\int [-g(x)] dx$, $\int [f(x) + g(x)] dx$

$\int [x + f(x)] dx$, $\int [g(x) - 4] dx$

5.2. Değişken Dönüşümü ile İntegrasyon

Bu yöntem integral hesaplamasının temel yöntemlerinden biridir. Bileşke fonksiyonun türevine dayanan değişken değiştirme yöntemi, tamamen belirsiz integralin, ters türev alma işlemi olması esasına dayanır. integral değişkeni x olan

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

biçimindeki bir integrali hesaplayabilmek için

$u = g(x)$ dönüşümü yapılırsa $du = g'(x)dx$ olduğundan integral,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

integraline dönüşür.

Örnekler: 1) $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}$ 2) $\int \cos x \cdot e^{\sin x} dx$ 3) $\int \frac{t dt}{1+t^2}$ 4) $\int \frac{(\arctan t)^{100}}{1+t^2} dt$

5) $\int (5t-6)^{2001} dt$

6) $\int \frac{t^5}{(3t)^{12} + 1} dt$

7) $\int \frac{dt}{(t-a)^k}$

8) $\int \frac{dt}{a^2+t^2}$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

10) $\int \frac{dx}{a^2-x^2}$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

13) $\int \tan x dx$

14) $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$

15) $\int \frac{dx}{\sin x}$

16) $\int \frac{dx}{\cos x}$

62.11m:

$$1) t = \ln x, dt = \frac{dx}{x}, \int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{(\ln x)^4}{4} + C$$

$$2) \int \cos x \cdot e^{\sin x} dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\sin x} + C \quad (t = \sin x, dt = \cos x dx)$$

$$3) \int \frac{t dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \ln |y| + C = \frac{1}{2} \ln |1+t^2| + C \quad (y = 1+t^2, dy = 2t dt)$$

$$4) \int \frac{(\arctan t)^{100}}{1+t^2} dt = \int u^{100} du = \frac{u^{101}}{101} + C = \frac{1}{101} (\arctan t)^{101} + C \quad \left(\begin{array}{l} u = \arctan t \\ du = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right)$$

$$5) \int (5t-6)^{2001} dt = \frac{1}{5} \int u^{2001} du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^{2002}}{2002} + C = \frac{(5t-6)^{2002}}{10010} + C \quad \left(\begin{array}{l} u = 5t-6 \\ du = 5 dt \end{array} \right)$$

$$6) \int \frac{t^5}{(3t)^{12} + 1} dt = \frac{1}{6 \cdot 3^5 \cdot 3} \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \frac{1}{4374} \arctan y + C = \frac{1}{4374} \arctan(3t) + C$$

$$(y = (3t)^6 \Rightarrow dy = 6 \cdot (3t)^5 \cdot 3 dt)$$

$$7) \int \frac{dt}{(t-a)^k} = \int \frac{du}{u^k} = \begin{cases} \ln |u|, & k=1 \\ -\frac{1}{(k-1)u^{k-1}} + C, & k \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} \ln |t-a| + C, & k=1 \\ -\frac{1}{(k-1)(t-a)^{k-1}} + C, & k \neq 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} t-a=u \\ dt=du \end{array} \right)$$

$$8) \int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \int \frac{dt}{a^2 (1 + \frac{t^2}{a^2})} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{1 + (\frac{t}{a})^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2} \quad \left(\begin{array}{l} u = \frac{t}{a} \\ du = \frac{1}{a} dt \end{array} \right)$$

$$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \cdot \arctan \left(\frac{t}{a} \right) + C$$

$$9) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2(1 - (\frac{x}{a})^2)}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \quad \left(\begin{array}{l} u = \frac{x}{a} \\ du = \frac{dx}{a} \end{array} \right)$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

$$10) \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \int \frac{dx}{a^2(1 - (\frac{x}{a})^2)} = \frac{1}{a} \cdot \int \frac{du}{1 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| \quad \left(\begin{array}{l} u = \frac{x}{a} \\ du = \frac{1}{a} dx \end{array} \right)$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C}$$

$$11) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + 1}| + C$$

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C}$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| + C = \ln (x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$$

$$13) \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\cos x| + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

$$14) \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} dx = \int \frac{(\tan x)'}{\tan x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C =$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln|\tan x| + C$$

$$15) \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{(\frac{x}{2})'}{\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} dx = \int \frac{dy}{\sin y \cos y} = \ln|\tan y| + C = \ln|\tan \frac{x}{2}| + C$$

$$16) \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{(x + \frac{\pi}{2})'}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} dx = \ln|\tan \frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}| + C$$

$$= \ln|\tan(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})| + C$$