

5.3. Kısmi İntegrasyon  
f ve g türevlenebilen iki fonksiyon olsun. Çarpımın türevi kuralına göre,

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

ya da her iki yanın integrali alınıp, uygun işlemler yapılsa

$$\int \frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] dx = \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int g(x) \cdot f'(x) dx$$

$$f(x) \cdot g(x) + C = \int f(x) \cdot g'(x) dx + \int g(x) \cdot f'(x) dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) dx + C$$

bulunur. Bu formüle kısmi integrasyon formülü denir. Kısalık olması bakımından,

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) dx$$

$$v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x) dx$$

ya da,

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Belirsiz İntegraller için  
kısmi integrasyon formülü

ya da -  
Not: Genellikle  $u$  veya  $v$  olarak alınacak fonksiyonlar özelliklerine göre logaritmik, ters trigonometrik, polinom, trigonometrik ve üstel fonksiyonlardır.

5.3. Örnekler:

$$1) \int x \cdot e^x dx = (x \cdot e^x) - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x (x - 1) + C$$

$$(u = x, dv = e^x dx)$$

$$du = dx, v = \int e^x dx = e^x + C$$

$$2) \int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C = x \sin x + \cos x + C$$

$$(u = x, du = dx, dv = \cos x dx, v = \int \cos x dx = \sin x)$$

$$3) \int x^2 \cdot e^x dx =$$

$$(u = x^2, e^x dx = dv)$$

$$du = 2x dx, v = e^x$$

$$I = \int x^2 e^x dx = x^2 \cdot e^x - \int e^x \cdot 2x dx = x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x dx \stackrel{(1)}{=} x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x e^x - e^x) + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

$$\stackrel{(1)}{=} x^2 \cdot e^x - 2 \cdot (x e^x - e^x) + C = e^x (x^2 - 2x + 2) + C$$

$$4) \int x^2 \cdot e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$$

$$\int x^2 \cdot e^{-x} dx = -e^{-x} (x^2 + 2x + 2) + C \text{ dir. (ödev)}$$

$$5) \int \ln x dx = ? \quad u = \ln x \quad dv = dx, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad v = x$$

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C = x (\ln x - 1) + C$$

$$6) \int \arcsin x dx = ? \quad \left( u = \arcsin x \Rightarrow du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, dv = dx \Rightarrow v = x \right)$$

$$\int \arcsin x dx = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (t = 1-x^2, dt = -2x dx)$$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{1/2}} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot t^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= x \cdot \arcsin x - \frac{1}{4} \sqrt{1-x^2} + C$$

$$6) \int x^3 \cdot \ln^2 x dx = ? \quad \left( u = \ln^2 x \Rightarrow du = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{dx}{x}, dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \right)$$

$$\int x^3 \cdot \ln^2 x dx = \frac{x^4}{4} \cdot \ln^2 x - \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{1}{2} \int x^3 \ln x dx \quad \left( u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, dv = x^3 dx \Rightarrow v = \frac{x^4}{4} \right)$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^4}{4} \cdot \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} \right]$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \cdot \ln x + \frac{1}{8} \int x^3 dx$$

$$= \frac{x^4}{4} \ln^2 x - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{1}{8} \cdot \frac{x^4}{4} + C$$

$$7) \int x \cdot \arctan x dx \quad 8) \int \sin(\ln x) dx \quad 9) \int \arctan(x) dx \quad 10) \int x^2 \cdot \arccos x dx$$

(bödev) (8. soruda  $u = \sin(\ln x)$ ,  $dv = dx$  d.b.n. yapilsin)

$$11) \int e^x \cdot \cos x dx = I, \quad \left( u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \right)$$

$$I = e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \sin x dx \quad \left( u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx, dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \right)$$

$$I = e^x \cdot \cos x + e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x dx$$

$$2I = e^x \cos x + e^x \sin x \Rightarrow I = \frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + C$$

Daha genel olarak

$$\int e^{ax} \cdot \cos bx dx = e^{ax} \left[ \frac{a \cdot \sin bx + b \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} \right] + C \quad \text{ve}$$

$$\int e^{ax} \cdot \sin bx dx = e^{ax} \left[ \frac{a \cdot \cos bx - b \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} \right] + C$$

bulunur.

Not: f'nin sıfır vererek şekilde art arda türevinin alınabildiği ve g'nin zorluk çıkarmadan art arda integre edilebildiği  $\int f(x) \cdot g(x) dx$  şeklindeki integrallerin kısmi integrasyon yardımıyla alınabildiğini gördük. Ancak kısmi integrasyonu çok fazla kullanmak gerektiyse, bu gibi durumlarda aşağıdaki örneklerde olduğu gibi tabanlı integrasyon denilen yöntem kullanılabilir.

Tablolu integrasyonla  $\int x^2 \cdot e^x dx$  integralini bulalım:

$f(x) = x^2$ ,  $g(x) = e^x dx$  alınarak aşağıdaki listeyi yapalım.

$f(x)$  ve türevleri       $g(x)$  ve integralleri

$x^2$	$(+)$	$e^x$
$2x$	$(-)$	$e^x$
$2$	$(+)$	$e^x$
$0$		$e^x$

oklarla birleştirilmi? fonksiyonların çarpımlarını ortadaki işaretlerle birbirlerine ekleyerek

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x + 2 \cdot e^x + C$$

elde ederiz.

$$\int x^3 \cdot \sin x dx = ?$$

$$f(x) = x^3 \quad g(x) = \sin x$$

$f(x)$  ve türevleri       $g(x)$  ve integralleri

$x^3$	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
$6$	$(-)$	$\cos x$
$0$		$\sin x$

$$\int x^3 \cdot \sin x dx = -x^3 \cdot \cos x + 3x^2 \cdot \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

elde ederiz.

#### 5.4. Trigonometrik İntegraller:

İntegrali alınacak olan fonksiyon trigonometrik bir fonksiyonun kuvveti ya da bu şekildeki fonksiyonların çarpımı olması halinde integralin nasıl alınacağı örneklerle açıklanacaktır. Bu kısımda

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \quad , \quad 1 + \tan^2 t = \sec^2 t$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) \quad 1 + \cot^2 t = \operatorname{cosec}^2 t$$

özdeşliklerinden yararlanacağız.

Örnekler:

$$1) \int \cot^2 5x dx = \int (\operatorname{cosec}^2 5x - 1) dx = -\frac{1}{5} \cot 5x - x + C$$

$$2) \int \tan^2 6x dx = \int (\sec^2 6x - 1) dx = \frac{1}{6} \tan 6x - x + C$$

$$3) \int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$4) \int \operatorname{cosec} x dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C \quad \text{dir, hesaplayalım:}$$

$$\int \sec x dx = \int \sec x \cdot \frac{\tan x + \sec x}{\tan x + \sec x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\tan x + \sec x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$(u = \operatorname{cosec} x - \cot x)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C$$

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \int \operatorname{cosec} x \cdot \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} dx = \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x}{\operatorname{cosec} x - \cot x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

5)  $\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + C$  dir:

$$\begin{aligned} I &= \int \sec^3 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan^2 x \cdot \sec x dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} u = \sec x \\ du = \sec x \cdot \tan x dx \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \sec^2 x dx \\ v = \tan x \end{array} \right)$$

$$2I = \sec x \cdot \tan x + \int \sec x dx$$

$$I = \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} [\sec x \cdot \tan x + \ln |\sec x + \tan x|] + C$$

6)

$\sin ax, \cos bx$  fonksiyonlarının çarpımının integrali:

Bu tip integraller hesaplanırken

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

özdeşlikleri kullanılır.

örnekler:

$$\begin{aligned} 1) \int \sin 8x \cdot \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 13x + \sin 3x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 13x dx + \frac{1}{2} \int \sin 3x dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13} \cos 13x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cos 3x + C = -\frac{1}{26} \cos 13x + \frac{1}{6} \cos 3x + C \end{aligned}$$

$$2) \int \cos 5x \cdot \cos 7x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 12x + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \sin 12x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$  biçimindeki integraller:

$m$  ve  $n$  doğal sayılarından en az biri tek ise:  $m$  tek,  $m=2k+1$  ise,

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx &= \int \sin^n x \cdot \cos^{2k} x \cdot \cos x dx \\ &= \int \sin^n x \cdot (1 - \sin^2 x)^k \cdot \cos x dx \end{aligned}$$

$$= \int u^n \cdot (1 - u^2)^k \cdot du = \dots$$

$m$  ve  $n$  doğal sayılarının ikisi de çift ise: yarımağı formüllerinden yararlanılır.

örnek: 1)  $\int \sin^7 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \, dx$  ( $u = \sin x$   
 $du = \cos x \, dx$ )

$$= \int \sin^6 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \, dx$$

$$= \int u^6 \cdot (1 - u^2) \, du = \int u^6 \, du - \int u^8 \, du$$

$$= \frac{u^7}{7} - \frac{u^9}{9} + C = \frac{1}{7} \sin^7 x - \frac{1}{9} \sin^9 x + C$$

2)  $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x) \cdot (1 + \cos 2x) \, dx$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x) \, dx$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

$$= \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x$$

3)  $\int \sin^5 2x \, dx = \int \sin^4 2x \cdot \sin 2x \, dx = \int (1 - \cos^2 2x)^2 \cdot \sin 2x \, dx$   $u = \cos 2x$   
 $du = -2 \cdot \sin 2x \, dx$

$$= -\frac{1}{2} \int (1 - u^2)^2 \, du = -\frac{1}{2} \int (1 - 2u^2 + u^4) \, du$$

$$= -\frac{1}{2} \left( u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right) + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos^3 2x - \frac{1}{10} \cos^5 2x + C$$

$\int \sec^n x \cdot \tan^m x \, dx$  biçimindeki integraller:

- $n$  çift doğal sayı ise:  $u = \tan x$  dönüşümü yapılır,  
 $du = \sec^2 x \, dx$ ,  $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$  özdeşliği kullanılarak  
 $\int \sec^n x \cdot \tan^m x \, dx = \int \sec^{n-2} x \cdot \tan^m x \cdot \sec^2 x \, dx = \dots$
- $m$  tek doğal sayı ise:  $u = \sec x$  dönüşümü yapılır,  
 $du = \sec x \cdot \tan x \, dx$ ,  $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$  kullanılır.
- $n$  tek,  $m$  çift ise: kısmi integrasyon uygulanır.

örnek: 1)  $\int \sec^4 x \cdot \tan^3 x \, dx = \int \sec^2 x \cdot \tan^3 x \cdot \sec^2 x \, dx =$

$$= \int (1 + \tan^2 x) \cdot \tan^3 x \cdot \sec^2 x \, dx$$

$$= \int (1 + u^2) \cdot u^3 \, du = \int u^3 \, du + \int u^5 \, du$$

$$= \frac{1}{6} \tan^6 x + \frac{1}{4} \tan^4 x + C$$

2)  $\int \sec x \cdot \tan^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \tan x \cdot \tan^2 x \, dx = \int \sec x \cdot \tan x \cdot (\sec^2 x - 1) \, dx$

$$= \int (u^2 - 1) \, du = \frac{u^3}{3} - u + C$$

$$= \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C$$
( $u = \sec x$   
 $du = \sec x \cdot \tan x \, dx$ )

$$3) \int \tan^4 x dx = \int (\sec^2 x - 1) \cdot \tan^2 x dx$$

$$= \int \sec^2 x \cdot \tan^2 x dx - \int \tan^2 x dx$$

$$\left( \begin{array}{l} u = \tan x \\ du = \sec^2 x dx \end{array} \right) = \int \sec^2 x \cdot \tan^2 x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \sec^2 x \cdot \tan^2 x dx - \int \sec^2 x dx - \int dx$$

$$= \int u^2 \cdot du - \tan x - x + C = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x - x + C$$

$$4) \int \tan^2 x \cdot \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1) \cdot \sec x dx = \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sec x \cdot \tan x + \ln |\sec x + \tan x| \right] - \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$= \frac{1}{2} (\sec x \tan x - \ln |\sec x + \tan x|) + C$$

$\int \csc^2 x \cdot \cot^m x dx$  biçimindeki integraller:

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x, \quad \begin{array}{l} u = \cot x \Rightarrow du = -\csc^2 x dx \text{ veya} \\ u = \csc x \Rightarrow du = -\csc x \cdot \cot x dx \end{array}$$

kullanılır.

$$\text{örnek 1) } \int \csc^4 x \cdot \cot^3 x dx = \int \csc^2 x \cdot \cot^3 x \cdot \csc^2 x dx$$

$$= \int (1 + \cot^2 x) \cdot \cot^3 x \cdot \csc^2 x dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int (1 + u^2) \cdot u^3 du = -\frac{1}{4} \left( \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6} \right) + C$$

$$= -\frac{1}{4} \left( \frac{\cot^4 x}{4} + \frac{1}{6} \cot^6 x \right) + C$$

$$\left( \begin{array}{l} u = \cot x \\ du = -\csc^2 x dx \end{array} \right)$$