Uygulama 13

1) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = ?$ (2018 Final)

$$\int \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2+t}$$

$$= \int \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right) dt$$

$\tan\frac{x}{2} = t$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$= \ln|t| - \ln|t+1| + C$$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{dx}{1+\sin x-\cos x} = \left(\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right|\right)\Bigg|_{\pi/2}^{2\pi/3} = \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{3}}\right| - \ln\left|\frac{\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{4}}\right|$$

$$= \ln\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} + \ln 2$$

2) $$\int_{-2}^{3}\left(|x+1| + \left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]|2x-1|\right)dx = \int_{-2}^{3}|x+1|\,dx + \int_{-2}^{3}\left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]|2x-1|\,dx$$

$$= \frac{17}{2} - 2 = \frac{13}{2}$$

$$\int_{-2}^{3}|x+1|\,dx = \int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx + \int_{-1}^{3} x+1\,dx = \left(\frac{-x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$

$x+1$ için kritik nokta -1

$$= \left(\frac{-1}{2}+1\right) - \left(\cancel{-2}+\cancel{2}\right) + \left(\frac{9}{2}+3\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right)$$

		-1	
$x+1$	$-$	0	$+$

$$= \frac{17}{2}$$

$$\int_{-2}^{3}\left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]|2x-1|\,dx = \int_{-2}^{0}\underbrace{\left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]}_{-1}|2x-1|\,dx + \int_{0}^{2}\underbrace{\left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]}_{0}|2x-1|\,dx + \int_{2}^{3}\underbrace{\left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]}_{1}|2x-1|\,dx$$

$\left[\left|\frac{x}{2}\right|\right]$ nin adım boyu 2

$$= -\int_{-2}^{0}|2x-1|\,dx + \int_{2}^{3}|2x-1|\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} 2x-1\,dx + \int_{2}^{3} 2x-1\,dx = (x^2-x)\Big|_{-2}^{0} + (x^2-x)\Big|_{2}^{3}$$

$$= -2$$

(2018 Final)

3) $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x.\cos \pi x$ ve $x \geq 0$ ise $f(4)=?$

Çözüm: $\left(\int_0^{x^2} f(t)dt\right)' = (x.\cos\pi x)'$

$$2x.\ f(x^2) = \cos\pi x + x(-\sin\pi x).\pi$$

$$2x\ f(x^2) = \cos\pi x - x\pi \sin\pi x$$

$x=2$ için

$$2.2.\ f(4) = \cos 2\pi - 2.\pi \sin 2\pi$$

$$4\ f(4) = 1$$

$$f(4) = \frac{1}{4}$$

(2018 yaz Final)

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\ dt}{1-\cos x}$ $\left(\frac{0}{0}\right) \underset{L.H.}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\ dt\right)'}{\sin x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\cancel{\sin x})\ (x^2)'}{\cancel{\sin x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2x$$

$$= 0$$

(2018 Bütünleme)

5) f sürekli bir fonksiyon ve $f(2)=3$ olsun. Buna göre

$$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$$ nedir?

Çözüm: $$\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt \overset{(\infty.0)}{=} \lim_{x\to 2} \frac{x.\int_2^x f(t)\,dt}{x-2}$$

$$\overset{(\frac{0}{0})}{\underset{L.H.}{=}} \lim_{x\to 2} \frac{\int_2^x f(t)\,dt + x.f(x)}{1}$$

$$= 0 + 2.f(2)$$

$$= 2.3$$

$$= 6$$

(2016 Final)

6) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}\,dx = 0$$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $$0 \le \left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}\,dx\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}\right| dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{|\sin(nx)|}{x^2+n^2}\,dx$$

$$\le \int_0^{2\pi} \frac{1}{x^2+n^2}\,dx$$

$$\le \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\,dx = \frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi} dx = \frac{2\pi}{n^2}$$

$0 \le \left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}\,dx\right| \le \frac{2\pi}{n^2}$ eşitsizliğinde $n\to\infty$ için limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}\left|\int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}\,dx\right| = 0$ ve dolayısıyla sıkıştırma prensibi gereği $\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nx)}{x^2+n^2}\,dx = 0$ dır.

7) $f(x) = x^2 - 5$ fonksiyonuna $[-1, 2]$ aralığında İnt. için Ortalama Değer teoremini uygulayınız. Uygun c sayısını bulunuz.

Çözüm: f, $[-1, 2]$ aralığında sürekli olduğundan İntegral için Ortalama Değer teoremi uygulanabilir.

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = (2-(-1))\, f(c)$$ olacak şekilde $c \in [-1, 2]$ vardır.

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{2} x^2 - 5\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 5x\right)\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 10\right) - \left(-\frac{1}{3} + 5\right)$$
$$= -12$$

$$f(c) = -4 \Rightarrow c^2 - 5 = -4$$
$$\Rightarrow c^2 = 1$$
$$\Rightarrow c = -1 \text{ veya } \boxed{c = +1}$$

8) $f(x) = |x|$ fonksiyonuna $[-2, 3]$ aralığında İnt. için Ortalama Değer teoremini uygulayınız. Uygun c sayısını bulunuz.

Çözüm: f, $[-2, 3]$ aralığında sürekli olduğundan İntegral için Ortalama Değer teoremi uygulanabilir.

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = (3-(-2)).\, f(c)$$ olacak şekilde $c \in [-2, 3]$ vardır.

$$\int_{-2}^{3} |x|\,dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx$$
$$= -\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3}$$
$$= -(0-2) + \left(\frac{9}{2} - 0\right) = \frac{13}{2}$$

$$f(c) = \frac{13}{10} \Rightarrow |c| = \frac{13}{10} \Rightarrow c = \mp\frac{13}{10} \in [-2, 3]$$

9) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{ex^2}{\pi} - \frac{e\pi}{4} + \int_x^{\pi/2} e^{\sin t}\,dt}{1+\cos 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{ex^2}{\pi} - \frac{e\pi}{4} - \int_{\pi/2}^{x} e^{\sin t}\,dt}{1+\cos 2x}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{L.H.}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2ex}{\pi} - e^{\sin x}}{-2\sin 2x}$$

$$\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{LH}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{2e}{\pi} - e^{\sin x}.\cos x}{-4\cos 2x}$$

$$= \frac{\frac{2e}{\pi}}{4}$$

$$= \frac{e}{2\pi}$$

10) $F(x) = \int_1^x e^{\frac{u^2+1}{u}} \frac{du}{u}$ $(u>0)$ ise $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{1/x} e^{\frac{u^2+1}{u}} \frac{du}{u} = \int_1^x e^{\frac{\left(\frac{1}{k}\right)^2+1}{\frac{1}{k}}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k}} \cdot \left(-\frac{1}{k^2}\right) dk$$

$u = \frac{1}{k}$

$du = -\frac{1}{k^2}\,dk$

üst sınır: $u = \frac{1}{x} \Rightarrow k = x$

alt sınır: $u = 1 \Rightarrow k = 1$

$$= \int_1^x e^{\frac{k^2+1}{k}} \left(\frac{-1}{k}\right) dk$$

$$= -\int_1^x e^{\frac{k^2+1}{k}} \frac{1}{k}\,dk$$

$$\overset{k=u}{=} -\int_1^x e^{\frac{u^2+1}{u}} \frac{1}{u}\,du$$

$$= -F(x)$$

11) $\forall x \geq 1$ için $\int_1^x f(t)\,dt = x + \ln(f(x))$ ise $f'(1) = ?$

Çözüm: $\left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = \left(x + \ln(f(x))\right)'$

$$f(x) = 1 + \frac{f'(x)}{f(x)} \Rightarrow f(1) = 1 + \frac{f'(1)}{f(1)} \Rightarrow f'(1) = f^2(1) - f(1)$$

$x = 1$ için $\int_1^1 f(t)\,dt = 1 + \ln(f(1))$

$$0 = 1 + \ln(f(1))$$

$$\ln(f(1)) = -1$$

$$\boxed{f(1) = e^{-1}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{e^2} - \frac{1}{e}$$

12) $\int_1^{e^2} \frac{[\![\ln x]\!]}{x-1}\,dx = ?$

Çözüm: $1 < x < e^2$

$\ln 1 < \ln x < \ln e^2$

$0 < \ln x < 2 \Rightarrow [\![\ln x]\!] = 0$ veya $[\![\ln x]\!] = 1$

$(x \in [1, e))$ $\quad (x \in [e, e^2))$

$$\int_1^{e^2} \frac{[\![\ln x]\!]}{x-1}\,dx = \int_1^e \frac{0}{x-1}\,dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= 0 + \left(\ln|x-1|\right)\Big|_e^{e^2}$$

$$= \ln(e^2 - 1) - \ln(e-1)$$

$$= \ln(e+1)$$

13) $f(x)=\begin{cases} x & , \quad 0 \le x < 1 \\ \sin(\pi x) & , \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$ veriliyor. Buna göre

a) $\int_0^2 f(x)\,dx = ?$ b) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ ise $F'(\frac{1}{2})=?$ $F'(\frac{3}{2})=?$

Çözüm: a) $\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 \sin(\pi x)\,dx$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\cos 2\pi - \cos\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}$$

b) $F'(x) = f(x)$

$$F'\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$F'\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

(2017 Bütünleme)

Ödev Problemler

1-) $\int_0^1 x^2\,dx$ integralini belirli integral tanımını kullanarak bulunuz. (2018 Yaz Final)

2-) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = ?$ (2018 Yaz Final)

3-) $\int_1^2 x\,[\![2x-1]\!]\,\mathrm{sgn}(2x-3)\,dx = ?$

4-) $f:[1,3]\to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x}$ fonksiyonu verilsin. $[1,3]$ aralığını 5 eşit parçaya bölerek oluşturulan P bölüntüsü için $A(f,P)$ toplamını bulunuz. (2018 Final)

5-) $f: [2,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}$ fonksiyonu verilsin. $[2,5]$ aralığını 3 eşit parçaya bölerek oluşturulan P bölüntüsü için $\ddot{U}(f,P)$ toplamını bulunuz.

6-) $\int_{-1}^{1} (|x|+1)\,dx$ integralini tanımdan yararlanarak bulunuz.