

•  $f(x) = 7x^3 - 3x^7$  fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözümü:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 21x^2 - 21x^6 \\ &= 21x^2(1-x^4) = 21x^2(1-x^2)(1+x^2) \\ &= \underbrace{21x^2(1+x^2)}_{\text{pozitif}} (1-x)(1+x) \end{aligned}$$

$x = -1, x = 1, x = 0$  kritik noktalar

$x=0$  aifit katlı kök olduğu için işareti etkilemez.

$f'$  |  $-$  |  $0$  |  $+$  |  $0$  |  $-$

$(-\infty, -1) \vee (1, \infty)$  da AZALAN

$(-1, 1)$  de ARTAN

$f(x) = x \cdot \ln x$  fonksiyonunun yerel maksimum veya yerel minimum noktalarını bulunuz.

Gözüm:  $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \text{Kritische Punkte}$$

$x > \frac{1}{e}$  için  $\ln x > -1$  ve dolayısıyla  $f'(x) > 0$  dir.

$x < \frac{1}{e}$  için  $\ln x < -1$  ve dolayısıyla  $f'(x) < 0$  dir.

	$\frac{1}{2}e$
$f'$	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <math>-</math> ↓ Azalon         </div> <div style="text-align: center;"> <math>\phi</math> </div> <div style="text-align: center;"> <math>+</math> ↗ Arton         </div> </div>

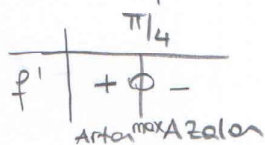
$$x = \frac{1}{e} \text{ yerel min. nokta}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \cdot \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \text{ yerel min. değer}$$

•  $f(x) = \sin x + \cos x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$  fonksiyonunun mutlak maksimum veya mutlak minimum noktalarını bulunuz. Diğer noktaları da.

Gözüm:  $f'(x) = \cos x - \sin x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x \in [0, \frac{\pi}{3}] \quad x = \frac{\pi}{4}$



$0 \leq x < \frac{\pi}{4}$  için  $\cos x > \sin x$   
 $f'(x) > 0$

$\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{3}$  için  $\sin x > \cos x$   
 $f'(x) < 0$

$f(0) = 1$

$f(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \rightarrow$  mutlak max. değer

$f(\frac{\pi}{3}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \rightarrow$  mutlak max. nokta

$f''(x) = -\sin x - \cos x$

$f''(x) = 0$

•  $f(x) = \frac{\sin x}{2 + \sin x}$  fonksiyonuna  $[0, \pi]$  aralığında Rolle teoremi uygulanabilir mi? Evet ise uygun  $c$  sayısını bulunuz.

Gözüm:  $\forall x \in [0, \pi]$  için  $\sin x \neq -2$  olduğundan  $f$ ,  $[0, \pi]$  de sürekli'dir.

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{\sin 0}{2 + \sin 0} = 0 \\ f(\pi) &= \frac{\sin \pi}{2 + \sin \pi} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) = f(\pi)$$

$f$ ,  $(0, \pi)$  de türevli midir?

$$f'(x) = \frac{\cos x (2 + \sin x) - \sin x \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{(2 + \sin x)^2}$$

$f$ ,  $(0, \pi)$  de türevlidir. O halde  $f$  fonksiyonuna  $[0, \pi]$  de Rolle teoremi uygulanabilir, yani  $f'(c) = 0$  olacak şekilde  $c \in (0, \pi)$  var.

$$\frac{2 \cos c}{(2 + \sin c)^2} = 0 \Rightarrow \cos c = 0 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$$

$$f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{fonksiyonuna}$$

Lagrange teoremi uygulanabilir mi? Evet ise uygun  $c$  sayısını bulunuz.

(2018 Yaz Arasınav)

Gözüm:  $0 \leq x < 1$  için  $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ ,  $1 < x \leq 2$  için  $f(x) = \frac{1}{x}$

Fonksiyonları sürekli ve türevlidir.  $x=1$  kritik noktadır.

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{x-1} = -1$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3-x^2}{2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{3-x^2-2}{2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{1-x^2}{2}}{x-1} = -1$$

$f$ ,  $x=1$  de türevli ve sürekli'dir. Bu durumda  $f$  fonksiyonuna Lagrange teoremi uygulanabilir.

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c), \quad c \in (0,2) \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\frac{1}{2} = f'(c)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x^2}, & 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \sqrt{2}$$

$0 < a < b$  olmak üzere  $\frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$  olduğunu gösteriniz.

Gözüm:  $f(x) = \arctan x$ ,  $[a,b]$

$f$ ,  $[a,b]$  de sürekli  
 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$   
 $f$ ,  $(a,b)$  de türevli

$\Rightarrow$   $f$  fonksiyonuna  $[a,b]$  de Ortalama Değer teoremi uygulanabilir.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad c \in (a,b) \Rightarrow \frac{\arctan b - \arctan a}{b - a} = \frac{1}{1+c^2}$$

$$\Rightarrow \arctan b - \arctan a = \frac{b-a}{1+c^2}$$

$$a < c < b$$

$$a^2 < c^2 < b^2$$

$$1+a^2 < 1+c^2 < 1+b^2$$

$$\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} < \frac{1}{1+a^2}$$

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \frac{b-a}{1+c^2} < \frac{b-a}{1+a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+a^2}$$

b) Rolle teoremini ifade ediniz ve

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi} \arctan(x+1), & -1 \leq x < 0 \\ x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

funksiyonuna  $[-1, 1]$  aralığında bu teoremin uygulanıp uygulanamayacağını belirleyiniz Uygulanabilir ise uygun  $c$  sayısını bulunuz.

Çözüm:

Rolle teoremi:  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $[a, b]$  kapalı aralığında sürekli,  $(a, b)$  açık aralığında türevli ve  $f(a) = f(b)$  olsun.

Bu takdirde  $f'(c) = 0$  olacak şekilde  $c \in (a, b)$  vardır.

$f$  fonksiyonu  $[-1, 0]$  aralığında  $f(x) = -\frac{4}{\pi} \arctan(x+1)$  ve  $(0, 1]$  aralığında  $f(x) = x^2 - 1$  şeklinde tanımlıdır ve süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{4}{\pi} \arctan(x+1) = -1$$

olduğundan  $f$ ,  
 $x_0 = 0$  noktasında  
süreklidir.

$$f(0) = -1$$

0 halde  $f$ ,  $[-1, 1]$  kapalı aralığında süreklidir.

$(-1, 0)$  aralığında  $f'(x) = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x+1)^2}$  ve  $(0, 1)$  aralığında

$f'(x) = 2x$  olduğundan  $f$ ,  $(-1, 0) \cup (0, 1)$  de türevlidir.

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1 - (-1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\frac{4}{\pi} \arctan(x+1) - (-1)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+(x+1)^2} = -\frac{2}{\pi}$$

$f'(0^+) \neq f'(0^-)$  olduğundan  $f$ ,  $x_0 = 0$  noktasında türevli değildir.

Bu nedenle  $f$  fonksiyonuna  $[-1, 1]$  aralığında Rolle teoremi uygulanamaz.