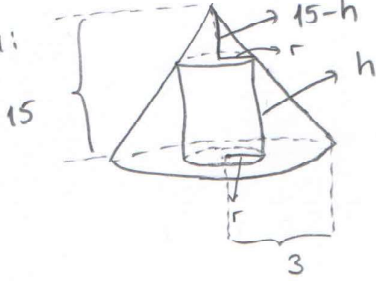


Uygulama 6

- 1) Taban yarıçapı 3, yüksekliği 15 olan bir koni içine dairesel dik bir silindiri yerleştiriliyor. Böyle bir silindirin sahip olabileceği en büyük hacmi bulunuz.

Gözüm:



$$\frac{15-h}{3} = \frac{r}{3}$$

$$15-h = 5r$$

$$h = 15-5r$$

Silindirin hacmi: $V = \pi r^2 h$

$$V(r) = \pi r^2 5(3-r)$$

$$V'(r) = 5\pi (2r \cdot (3-r) + r^2 \cdot (-1))$$

$$V'(r) = 5\pi (6r - 2r^2 - r^2) = 5\pi (6r - 3r^2)$$

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 6r - 3r^2 = 0 \Leftrightarrow 3r(2-r) = 0 \Leftrightarrow r = 2$$

$$V(2) = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (3-2) = 20\pi$$

- 2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ için $0 \leq x \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x \leq \frac{1}{2}(\pi-1)$ olduğunu gösteriniz.

Gözüm: $g(x) = x \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$

$$g'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cos x - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin x \cos x$$

$$= \underbrace{\sin x}_{+} + \underbrace{\cos x}_{+} \underbrace{(x - \sin x)}_{+}, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

> 0

$\Rightarrow g$ ARTAN

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow g(0) \leq g(x) \leq g(\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x \leq \frac{\pi}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{\pi-1}{2}$$

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ olduğunu gösteriniz.

Gözüm: $x < y$ olsun.

$$f(t) = \sin t, \quad [x, y]$$

f fonksiyonu $[x, y]$ aralığında sürekli'dir.

$$f'(t) = \cos t$$

f fonksiyonu (x, y) aralığında türevlidir. O halde Lagrange teoremi gereği $f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$ olacak şekilde $c \in (x, y)$ vardır.

$$\cos c = \frac{\sin y - \sin x}{y - x} \Rightarrow |\cos c| = \frac{|\sin y - \sin x|}{|y - x|}$$

$$|\cos c| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\sin y - \sin x|}{|y - x|} \leq 1 \Rightarrow |\sin y - \sin x| \leq |y - x|$$

4) $f(x) = \arctan x - \ln(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu veriliyor.

a) f nin yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

b) f nin monoton olduğu aralıkları bulunuz.

c) f nin bükümlük durumunu inceleyiniz.

(2018 Bütünleme)

Gözüm:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{1-2x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ kritik nokta}$$

$$\begin{array}{c|c} f' & \frac{1}{2} \\ \hline & + \quad - \end{array}$$

$x < \frac{1}{2}$ için $f'(x) > 0$, $x > \frac{1}{2}$ için $f'(x) < 0$ dir.

a) $x = \frac{1}{2}$ yerel maksimum noktadır.

b) f , $(-\infty, \frac{1}{2})$ de artan, $(\frac{1}{2}, \infty)$ da azalandır.

$$c) f''(x) = \frac{-2 \cdot (1+x^2) - (1-2x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{-2 - 2x^2 - 2x + 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(x^2 - x - 1)}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5 > 0$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
f''	+	-	+
	konveks	konkav	konveks

f , $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ ve $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$ aralığında konveks (dışbükey),
 $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ aralığında konkav (içbükey) dir.

$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ve $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dönüm noktasıdır.

5) $f(x) = x \cdot \ln x$ fonksiyonunu $x_0 = 1$ noktasında Taylor serisine açınız.

Çözüm:

Taylor serisi:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

$x_0 = 1$ için

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(1) = 1$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'''(1) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f^{(4)}(1) = 2$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{-2 \cdot 3}{x^4} \Rightarrow f^{(5)}(1) = -2 \cdot 3$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \cdot (n-2)!}{x^{n-1}}, \quad \forall n \in \{2, 3, 4, 5, \dots\}$$

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n$$

$$= 0 + (x-1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-2)!}{n!} (x-1)^n$$

$$= x-1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} (x-1)^n$$

6) $\sin x \cdot \cos x$ ve $\cos^2 x$ fonksiyonlarını Maclauren serisine açınız.

Çözüm:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$$

7) Maclaurin açılımından yararlanarak $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$

ve $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \left[\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \dots \right]}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3!} - \cancel{\frac{x^2}{5!}} + \cancel{\frac{x^4}{7!}} - \dots$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots \right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \cancel{\frac{x}{2!}} + \cancel{\frac{x^2}{3!}} + \dots$$

$$= 1$$

8) Alanı 144 cm^2 olan kare biçimindeki bir kartonun köşelerinden eşit alanlı birer kare kesilerek geriye kalan parçalardan üstü açık bir prizma yapılıyor. Bu prizmanın hacmi en fazla kaç cm^3 olur?

A) 100

B) 120

C) 124

D) 128

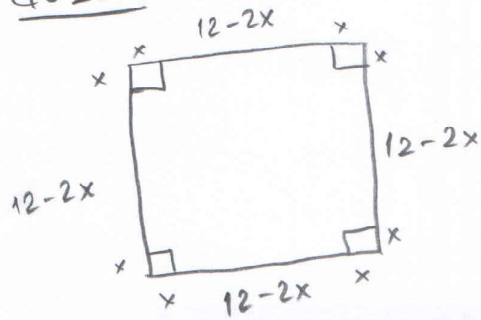
E) 130

(2013 ÖABT)

Gözüm:

Karenin alanı

144 cm^2 olduğu için bir kenarı 12 cm dir.



Prizmanın hacmi: $V(x) = (12-2x)^2 \cdot x$

$$V'(x) = 2(12-2x) \cdot (-2) \cdot x + (12-2x)^2 \cdot 1$$

$$V'(x) = (12-2x)(-4x + 12 - 2x)$$

$$V'(x) = (12-2x)(12-6x)$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x=6} \text{ veya } x=2$$

Prizma oluşmaz

$$x=2 \text{ için } V = (12-2 \cdot 2)^2 \cdot 2 = 128 \text{ cm}^3$$