

# UYGULAMA 7

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsinh}(x^2)}{\cosh x - 1} \quad \left( \frac{0}{0} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+(x^2)^2}} \cdot 2x}{\sinh x}$$

$$\sinh 0 = 0$$

$$\cosh 0 = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{x}{\sinh x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sinh x}$$

$$\left( \frac{0}{0} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cosh x}$$

$$= 2 \cdot 1$$

$$= 2$$

(2018 Arasınar)

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x)^{-1/\ln x} = ? \quad (0^\circ \text{ belirsizliği})$$

$$y = (3x)^{-1/\ln x}$$

$$\ln y = -\frac{1}{\ln x} \cdot \ln 3x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\ln 3x}{\ln x} \quad \left( \frac{\infty}{\infty} \right) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{3x} \cdot 3}{\frac{1}{x}} = -1$$

$$\ln \lim_{x \rightarrow 0^+} y = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

(2017 Arasınar)

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \cos \frac{1}{x} - e^{2/x} \right) \stackrel{(\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{1}{x} - e^{2/x}}{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{1}{x} = u \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - e^{2u}}{u}$$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\sin u - e^{2u} \cdot 2}{1}$$

$$= -1 \cdot 2$$

$$= -2$$

(2017 Arasınay)

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x}$$

$$\stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + (1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x))}$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0$$

(2018 Yaz Arasınay)

5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln(\cot x))^{\tan x} = ?$  ( $\infty^0$  belirsizliği)

Gözüm:  $y = (\ln(\cot x))^{\tan x}$

$\ln y = (\tan x) \ln(\ln(\cot x))$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\tan x) (\ln(\ln(\cot x))) \stackrel{(0 \cdot \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\ln(\cot x))}{\cot x}$

$\stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\ln(\cot x)} \cdot \frac{1}{\cot x} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\underbrace{\cot x}_{\infty}) (\underbrace{\ln(\cot x)}_{\infty})} = 0 \Rightarrow \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} y = 1$

(2018 yaz Arasınar)

6)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Gözüm:  $x^2 - 4 \neq 0$  olmalı, yani  $x \neq \pm 2$  olmalıdır.

$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty$

$\frac{x}{x^2 - 4} \quad \begin{array}{c|cc} -2 & & 2 \\ \hline + & \phi & - & \phi & + \end{array}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$

$x = 2$  ve  $x = -2$  dikey asimptot,  $y = 0$  yatay asimptot  
 $x = 0$  için  $y = 0$  dir.  $(0,0)$  noktasından geçer.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

$y = mx + n$  Eğik asimptot yok.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-4) - x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-(4+x^2)}{(x^2-4)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$  için  $f'(x) < 0$  dir. Dolayısıyla fonksiyon tanım kümesinde azalandır. Yerel maksimum ve yerel minimum noktası yoktur.

$$f''(x) = - \frac{2x(x^2-4)^2 - (4+x^2) \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^4}$$

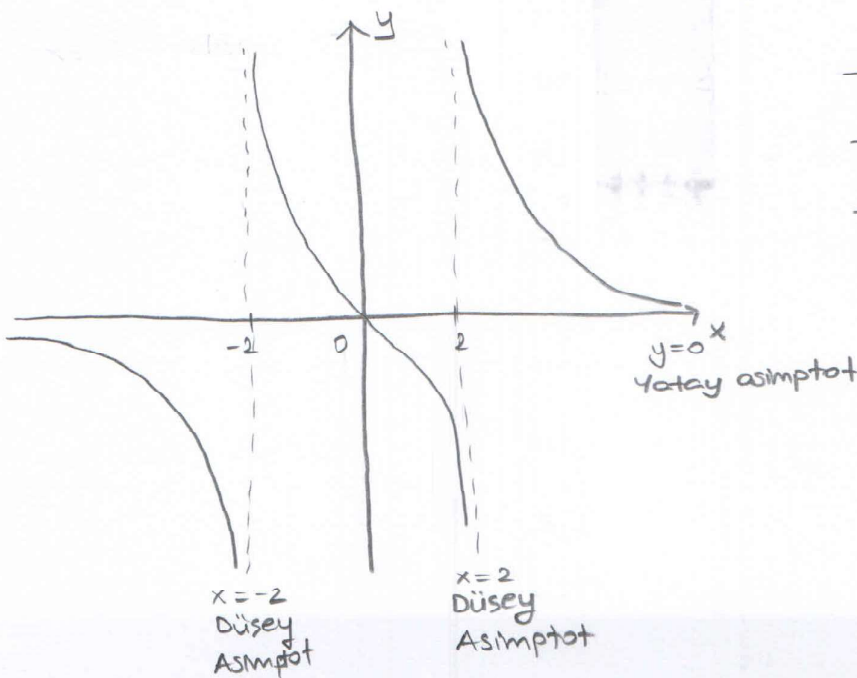
$$= \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

İsareti belirleyen kısım

	-2	0	2	
$x$	-	-	+	+
$(x^2-4)^3$	+	-	-	+
$\frac{x}{(x^2-4)^3}$	-	+	-	+

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ Dönüm noktası}$$

$(-\infty, -2)$  ve  $(0, 2)$  aralıklarında  $f''(x) < 0$ , yani  $f$  konkav,  
 $(-2, 0)$  ve  $(2, \infty)$  aralıklarında  $f''(x) > 0$ , yani  $f$  konvektir.



	-2	0	2	
$f''(x)$	-	+	-	+
$f'(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	Azalan Konkav	Azalan Konveks	Azalan Konkav	Azalan Konveks

7)  $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^2}$  fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Gözüm:  $x > 0$  ve  $\ln x \neq 0$  olmalıdır.

$$D_f = (0, 1) \cup (1, \infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(\ln x)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(\ln x)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0$$

$x=1$  dikey asimptot,  $y=0$  yatay asimptot

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(\ln x)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} = 0, \quad \text{Eğik asimptot yok.}$$

$$f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{(\ln x)^3} \cdot \frac{1}{x}$$

	0	1
x	-	+
$(\ln x)^3$	-	+
$\frac{1}{x}$	-	+

$x \in (0, 1)$  için  $f'(x) > 0$  ve  $f$  artan,  $x \in (1, \infty)$  için  $f'(x) < 0$  ve  $f$  azalandır.

$$f'(x) = -2 \cdot ((\ln x)^3 \cdot x)^{-1}$$

$$f''(x) = 2 \cdot ((\ln x)^3 \cdot x)^{-2} \cdot ((\ln x)^3 \cdot x)'$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{(\ln x)^6 \cdot x^2} \cdot \left( 3(\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x + (\ln x)^3 \cdot 1 \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{(\ln x)^2}{(\ln x)^6 \cdot x^2} \cdot (3 + \ln x)$$

isareti belirleyen kısım

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \quad \text{Dönüm noktası}$$

	0	$\frac{1}{e^3}$	1
$f''(x)$	-	+	+
$f'(x)$	+	+	-
$f$	Konkav Artan	Konveks Artan	Konveks Azalan

