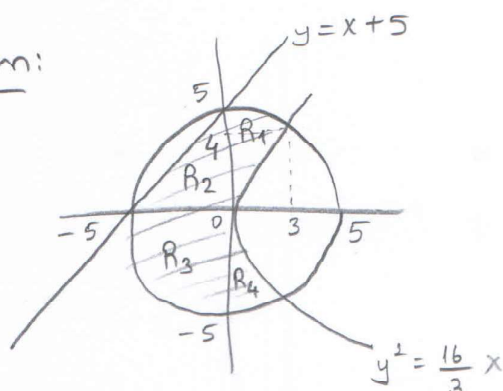


UYG. 15

1) $x^2 + y^2 = 25$ çemberi, $y = x + 5$ doğrusu ve $y^2 = \frac{16}{3}x$ parabolü ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Gözüm:



$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ y^2 = \frac{16}{3}x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + \frac{16}{3}x - 25 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 16x - 75 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ veya } x = -\frac{25}{3}$$

$$x^2 + y^2 = 25 \Rightarrow y^2 = 25 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{25 - x^2} \text{ veya } y = -\sqrt{25 - x^2}$$

(üst yarı çember) (alt yarı çember)

$$y^2 = \frac{16}{3}x \Rightarrow y = \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{x} \text{ veya } y = -\frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{x}$$

(Parabolün 1. bölgedeki parçası) (Parabolün 4. bölgedeki parçası)

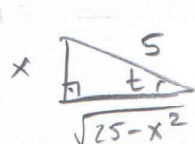
$$R_1 = \int_0^3 \left(\sqrt{25 - x^2} - \frac{4}{\sqrt{3}}\sqrt{x} \right) dx = \int_0^3 \sqrt{25 - x^2} dx - \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^3 x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\int \sqrt{25 - x^2} dx \underset{\substack{x = 5 \sin t \\ dx = 5 \cos t dt}}{=} \int \sqrt{25 - 25 \sin^2 t} 5 \cos t dt = 25 \int \cos^2 t dt$$

$$= 25 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$\sin t = \frac{x}{5}$$

$$t = \arcsin \frac{x}{5}$$



$$\cos t = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5}$$

$$R_1 = \frac{25}{2} \left(\arcsin \frac{x}{5} + \frac{x \sqrt{25 - x^2}}{25} \right) \Big|_0^3 - \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^3$$

$$= \frac{25}{2} \left(\arcsin \frac{3}{5} + \frac{12}{25} \right) - \frac{8}{3\sqrt{3}} = \frac{25}{2} \arcsin \frac{3}{5} - 2$$

$$R_2 = \int_{-5}^0 x+5-0 \, dx = \left(\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_{-5}^0$$

$$= \left(0 - \left(\frac{25}{2} - 25 \right) \right) = \frac{25}{2} \text{ (üçgenin alanı)}$$

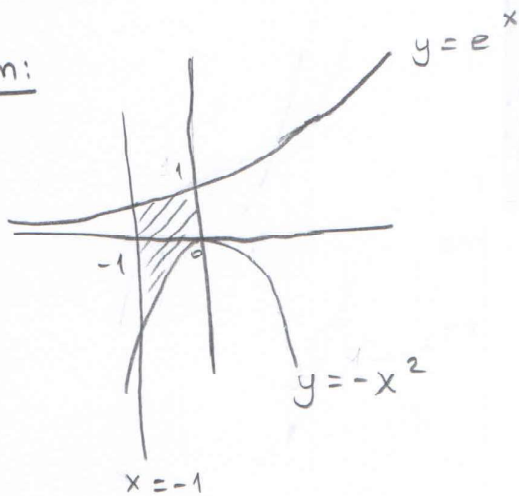
$$R_3 = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} = \frac{25\pi}{4}$$

$$R_4 = R_1$$

$$\text{Toplam Alan} \quad R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

2) $y = e^x$ eğrisi, $y = -x^2$ parabolü, $x = -1$ doğrusu ve y eksenini ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

Gözüm:



$$A = \int_{-1}^0 (e^x - (-x^2)) \, dx$$

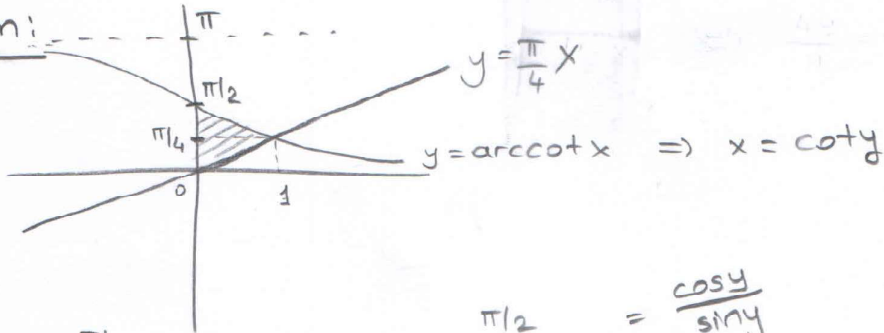
$$= \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^0$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{e}$$

3) $y = \operatorname{arccot} x$ eğrisi, $y = \frac{\pi}{4} x$ doğrusu ve y eksenini ile sınırlı bölgenin alanını bulunuz.

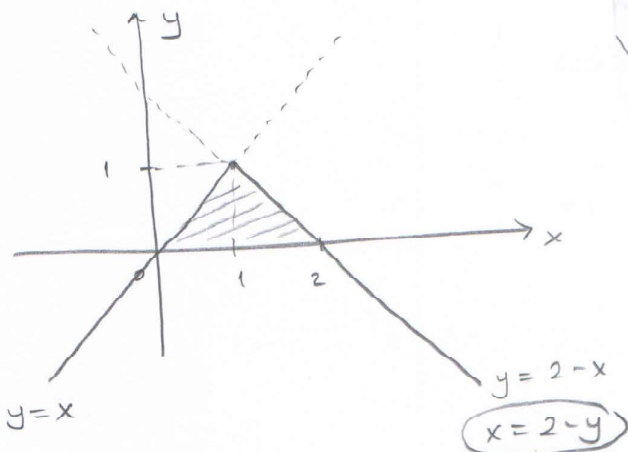
Gözüm:



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{\pi/4} \left(\frac{4y}{\pi} \right) dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot y dy \\
 &= \left(\frac{4}{\pi} \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi/4} + (\ln |\sin y|) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \\
 &= \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{16} \right) + \left(0 - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\pi}{8} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

4) $y = 1 - |x - 1|$ eğrisi ile x eksenini arasında kalan bölgenin y eksenini etrafında dönmesiyle oluşan hacmi bulunuz.

Gözüm: $x > 1$ için $y = 2 - x$, $x < 1$ için $y = x$ dir.



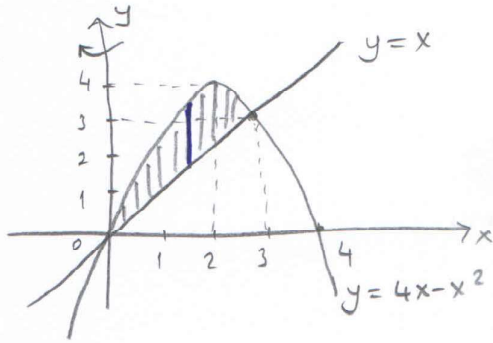
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 ((2-y)^2 - y^2) dy \\
 &= \pi \int_0^1 (4 + y^2 - 4y - y^2) dy \\
 &= \pi (4y - 2y^2) \Big|_0^1 \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

x eksenini etrafında döndürülseydi

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 x^2 dx + \pi \int_1^2 (2-x)^2 dx \\
 &= \frac{2\pi}{3}
 \end{aligned}$$

5) $y = 4x - x^2$ parabolü ve $y = x$ doğrusu ile sınırlı bölgenin y -ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Gözüm:



$$y = 4x - x^2 = 4 - (2 - x)^2$$

$$x = 2 \text{ için } y = 4$$

$$x = 0 \text{ için } y = 0$$

$$y = 0 \text{ için } x = 0, x = 4$$

$$4x - x^2 = x \Rightarrow 3x - x^2 = 0 \Rightarrow x(3 - x) = 0 \\ \Rightarrow x = 0, x = 3 \\ y = 0, y = 3$$

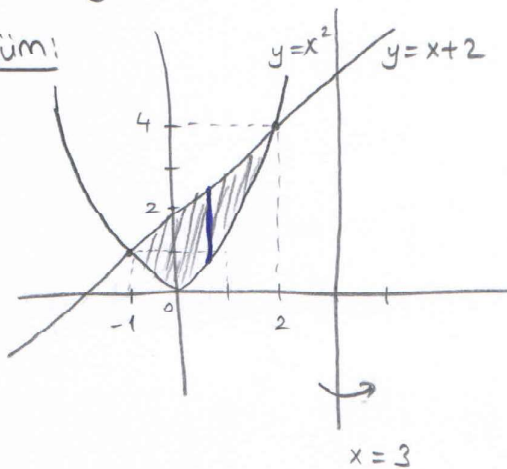
$$V = 2\pi \int_0^3 x \cdot [(4x - x^2) - x] dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 x(3x - x^2) dx = 2\pi \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = 2\pi \left(x^3 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 \\ = 2\pi \left(27 - \frac{81}{4} \right) = \frac{27}{2}\pi$$

(2018 Yaz Final)

6) $y = x^2$ parabolü ve $y = x + 2$ doğrusu ile sınırlı bölgenin $x = 3$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

Gözüm:



$$x^2 = x + 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x = 2, x = -1$$

$$y = 4, y = 1$$

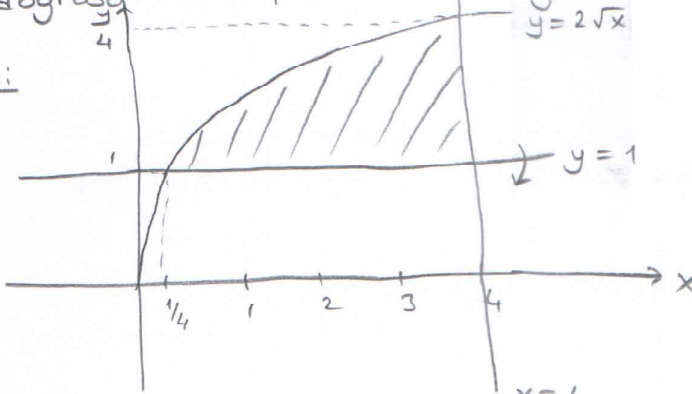
$$V = 2\pi \int_{-1}^2 (3 - x)(x + 2 - x^2) dx = 2\pi \int_{-1}^2 (3x + 6 - 3x^2 - x^2 - 2x + x^3) dx \\ = 2\pi \int_{-1}^2 (x^3 - 4x^2 + x + 6) dx = 2\pi \left(\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{45}{2}\pi$$

(2016 Final)

7) $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi, $y=1$ ve $x=4$ doğruları ile sınırlı bölgenin

$y=1$ doğrusu etrafında dömesiyle oluşan hacmi bulunuz.

Gözüm:

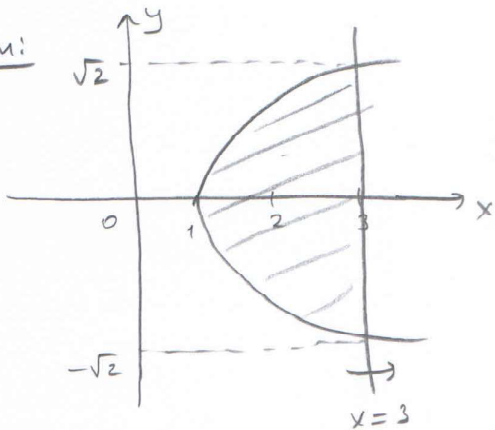


$$V = \pi \int_{1/4}^4 (y-1)^2 dx = \pi \int_{1/4}^4 (2\sqrt{x}-1)^2 dx = \pi \int_{1/4}^4 (4x+1-4\sqrt{x}) dx$$

$$= \pi \left(2x^2 + x - 8 \frac{x^{3/2}}{3} \right) \Big|_{1/4}^4 = \frac{117}{8} \pi$$

8) $x=y^2+1$ parabolü ve $x=3$ doğrusu ile sınırlı bölgenin $x=3$ doğrusu etrafında dömesiyle oluşan hacmi bulunuz.

Gözüm:



$$V = \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x-3)^2 dy$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (y^2+1-3)^2 dy$$

$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (y^2-2)^2 dy$$

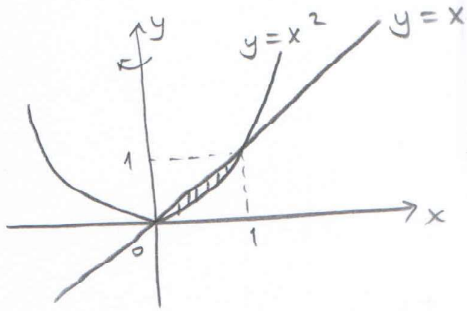
$$= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (y^4 - 4y^2 + 4) dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^5}{5} - \frac{4y^3}{3} + 4y \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{64\sqrt{2}}{15} \pi$$

9) $y = x$ ve $y = x^2$ eğrileri arasında kalan bölgenin y ekseninde dördürölmesi ile oluşan hacmi bulunuz.

Gözüm:



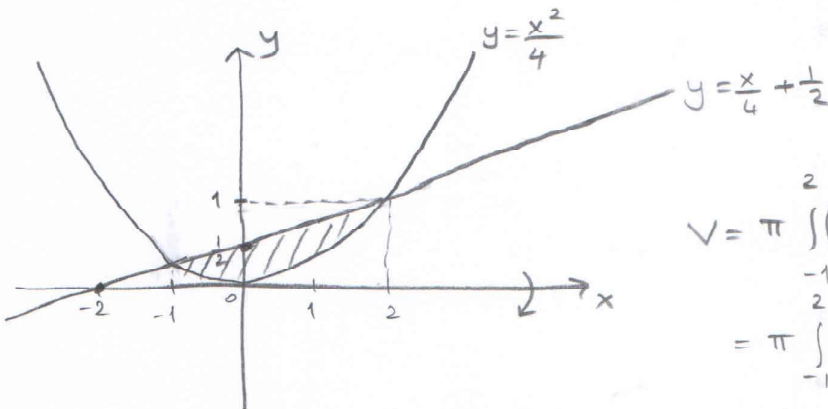
$$\begin{aligned} x^2 &= x \Rightarrow x(x-1) = 0 \\ \Rightarrow x &= 0, x = 1 \\ y &= 0 \quad y = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x(x-x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2-x^3) dx \\ &= 2\pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

10) $x^2 = 4y$ parabolü ile $y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$ doğrusu arasında kalan bölgenin x ekseninde dönmeyeyle oluşan hacmi bulunuz.

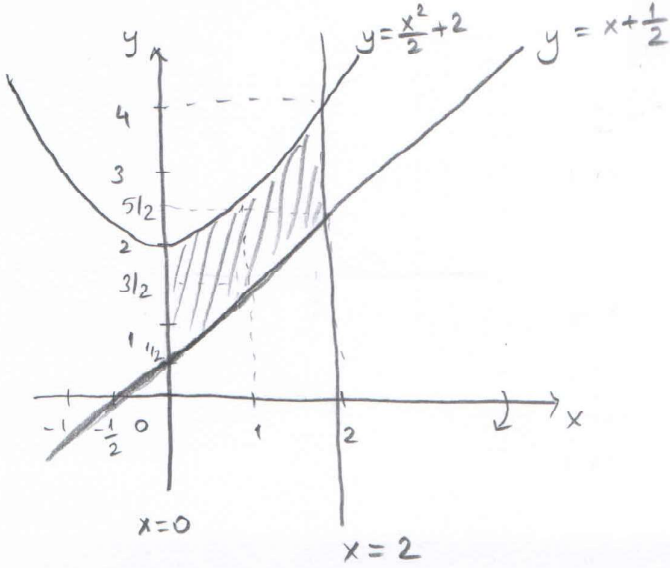
Gözüm:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} &= \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \\ \Rightarrow (x-2)(x+1) &= 0 \\ \Rightarrow x &= 2, x = -1 \\ y &= 1 \quad y = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^2 \left(\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \right) dx \\ &= \pi \int_{-1}^2 \left(\frac{x^2}{16} + \frac{1}{4} + \frac{x}{4} - \frac{x^4}{16} \right) dx \\ &= \frac{9}{10} \pi \end{aligned}$$

11) $y = \frac{x^2}{2} + 2$ parabolü ve $y = x + \frac{1}{2}$, $x=0$, $x=2$ doğruları ile sınırlı bölgenin x -ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^2 \left(\left(\frac{x^2}{2} + 2 \right)^2 - \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 \right) dx \\
 &= \pi \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} + 2x^2 + 4 - x^2 - x - \frac{1}{4} \right) dx \\
 &= \pi \int_0^2 \left(\frac{x^4}{4} + x^2 - x + \frac{15}{4} \right) dx \\
 &= \pi \left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{15}{4}x \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{293}{30} \pi
 \end{aligned}$$