

Matematiksel Modelleme ve Uygulamaları

The purpose of computing is insight, not numbers

*Hesap yapmanın amacı, sayılar elde etmek değil,
bir hususu/konuyu **aklını kullanarak**
derinlemesine **anlamaktır.***

Matematiksel Modelleme

Mühendisler ve Biliminsanları SİSTEMLERİ,

- *Anlamaya,*
- *Geliştirmeye, veya*
- *Optimize*
etmeye çalışırlar
- Burada **SİSTEM** ilgi duyulan nesneyi tanımlamaktadır.
 - Bu nesne herşey olabilir, doğal veya insan yapımı.

Matematiksel Modelleme

Prensip olarak günlük yaşamda herkes sistemle uğraşır.

Örnek;

Düz olmayan bir zemindeki masayı düşünün!

Bunu çözmek için ne yapılması gerektiğini herkes bilir,

Masanın bir bacağına karton yerleştirmek

Ancak daha teknik problemler vardır,

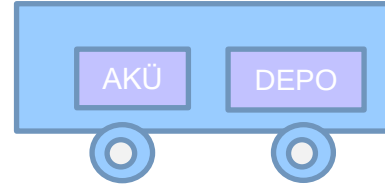
Bunların özelliği de karmaşık olmalarıdır.

Bilim insanı ve mühendislerin görevinde karmaşık problemlerle uğraşmaktır.

Karmaşıklığı gidermek için genel strateji sistemi parçalayarak
BASİTLEŞTİRMEKTİR:

Basitleştirme

- Arabanın çalışmadığını düşünün!
- Bu durumda herkes öncelikle akü ve depoya bakacaktır
- Bunu sebebi kafamızda arabayı akü ve yakıt olarak basitleştirmiş olmamızdır.



Gerçek sistem olarak araba ve basit model

SİSTEM NEDİR?

- 1 Birbirleriyle etkileşim içinde olan ve birbirlerine bağımlı parçaların bir amaç için oluşturduğu bütündür.
- 2 Her sistemin bir amacı vardır
 - *Nakliye sistemi*'nin amacı nakliyat yapmaktır.
 - *Organizasyon ve yönetim sistemi*'nin amacı herhangi bir yerdeki organizasyonu sağlayarak orayı yönetmektir.
 - *Eğitim sistemi*'nin amacı insanları belirli konularda eğitmektir.
 - *Üretim sistemi*'nin amacı bir yerde istenen üretimi sağlamaktır
- 3 Bir sistemin ***amacı veya hedefi*** açıkça tanımlanmak ve anlaşılmak zorundadır

SİSTEM UNSURLARI

1

Parçalar sistemin girdi, çıktı ve işlemlerini oluşturur. Her sistemin parçaları, sistemin durumunu belirten değişik değerlere sahiptir. Bu değerler bazı kontrol parametrelerine ve kısıtlamalara bağlıdır.

2

Öznitelikler(vasıflar) sistemin parçalarının özellikleri veya farklılıklarını belirtirlerdir.

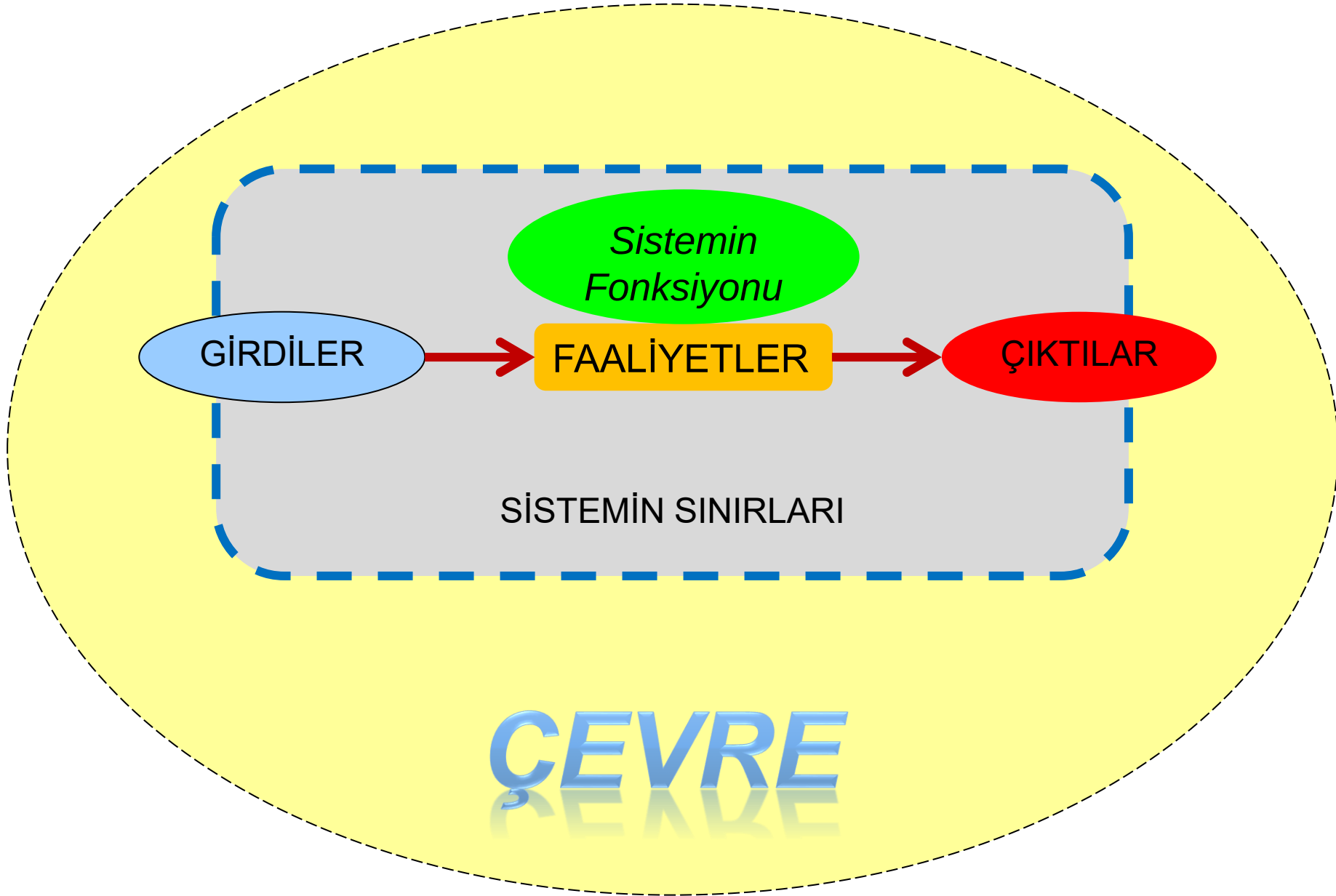
3

İlişkiler ise parçalar ile vasıflar arasındaki bağlantıyı sağlamaktadır.

PARÇALARIN ÖZELLİKLERİ

- Her parçanın özellik ve davranışının tüm sistem üzerinde etkisi vardır.
- Her parçanın özellik ve davranışı, en azından sistemdeki bir başka parçanın davranış ve özelliğine bağlıdır.
- Hiçbir parça bağımsız alt parçalara bölünemez.
- Parçalar arasındaki bu ilişki **hiyerarşi** olarak tanımlanır

SİSTEM



SİSTEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

1 Doğal Sistemler ---- İnsan Yapımı Sistemler

2 Fiziksel Sistemler ---- Kuramsal Sistemler

3 Statik Sistemler ---- Dinamik Sistemler

4 Açık Sistemler ---- Kapalı Sistemler

5 Sibernetik Sistemler

SİSTEM HAYAT DÖNGÜSÜ

- İnsan-yapımı sistemlerin döngüsü

Kuramsal
Tasarım

DeneySEL
Tasarım ve
Geliştirme

Üretim
ve/veya İnşa
işletme

Ürün Kullanımı
ve atma

Bu döngüde sistem *maliyet-etkin* ve
rekabet edebilir olmalıdır

SİSTEM ANALİZİ

- Sistem bir bütündür.
- Bu sistemin en iyi şekilde çalışması bazen açıkça belli değil veya tek değildir.
- Sistemin en iyi şekilde çalıştığı durumun bulunmasına “**optimizasyon**” denir.
- Optimizasyon için, sistemin yönetiminde karşılaşılan problemlere çözüm aramak veya sistemi daha verimli bir şekilde çalışır hale getirmek için **sistemi** elemanları ile birlikte **incelemek** gerekir.

-
- Bilim insanı veya mühendisler tarafından incelenen sistem ;
 - Bir çeşit ölçülebilir çıktı üretmeleri gerekmektedir.
 - Sistem gözlemlenebilir olmalıdır.
 - Sistemlere ayrıca çıktı ile alakalı bir girdi olmalıdır
 - Bilim insanları bazen sadece sistemin kendisini inceleyerek girdi-çıkı ilişkisine bakmazlar
 - Ancak mühendisler sistemin girdi-çıkı ilişkisi ile ilgilenirler.
 - Girdi-çıkı ilişkisine genellikle sayısal veri üretirler ve bu matematiksel ifadelerle tanımlanabilir.

SİSTEM ANALİZİ

- Mühendisler, *herhangi bir araştırma, tasarım, geliştirme, inşa, üretim, işletme faaliyeti veya bu faaliyetlerin senteziyle uğraşırsa uğraşsın*, **kısıtlı kaynakların etkin** kullanımını sağlamalıdır.
- Kısıtlı kaynakların bilinen bir şekilde kullanımı yeteri kadar tatminkar değilse, daha iyi **kullanım alternatifleri** aranır.
- Alternatifler aranırken **gerçekler (gerçek durum)** kuramsal olarak **basitleştirilir**.
- Bu basitleştirmede genellikle **MODELLEME** olarak bilinir.

MODEL NEDİR?

- Bir şeyin küçültülmüş örneğidir.
- Yapılacak bir şeyin şablonudur.
- Bir şeyi görselleştirmeye yarayan tanımlamadır.
- Göz önüne alınan sistemi ifade etmekte ve sistem içindeki ilişkileri tanımlamaktır.

MODEL NEDİR?

Bir sistemin veya sistem içindeki ilişkilerin tanımlanması için değişik yollar vardır:

- *Kelimeler,*
- *Çizimler veya kroki(taslak),*
- *Fiziksel modeller,*
- *Bilgisayar programı, veya*
- *Matematiksel formüller.*

Bir başka ifade ile modelleme değişik diller kullanılarak yapılır

MODEL NEDİR?

Kullanılan dile bağlı olarak farklı modeller tanımlanır

Bu Tanımlamalar:

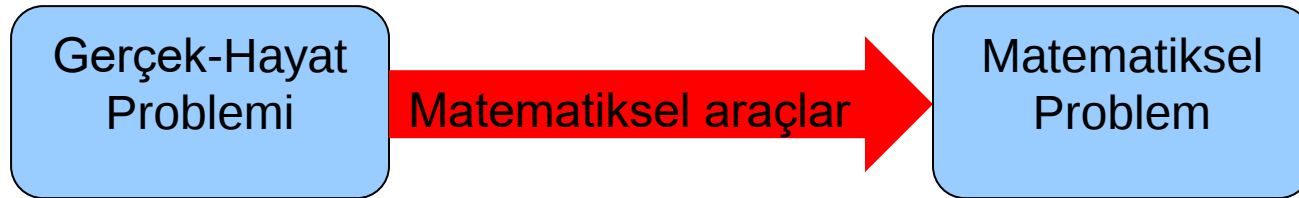
- Fiziksel Modeller,
- Benzetim(Analog) Modeller
- Şematik Modeller
- Matematiksel Modeller

Matematiksel Model?

- Bir sistemin değişen koşullar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında varsayımlarda bulunmak amacıyla elemanları arasındaki bağlantıları **matematiksel terimlerle** belirleyen ifadeler topluluğudur
- Gerçek hayat problemlerin tarif etmek ve bu problemlerden ortaya çıkan önemli soruları araştırmak için matematiğin kullanılmasıdır.
- Matematiksel araçlar kullanılarak, gerçek-hayat problemleri onu taklit eden matematiksel problemlere dönüştürülür.



Matematiksel Model?



Matematiksel problemin çözümü, gerçek dünya probleminin çözümü olarak yorumlanır.

Modellemenin ana hedefi;

Gerçek dünya üzerinde değil de, gerçek dünya problemini tanımlayan matematiksel model üzerinde testler yapmaktır

Modellemedeki zorluklar;

En kapsamlı tanımlayıcı modeli değil de, ilgilenilen olgunun ana özelliklerini içeren mümkün olan en basit modeli oluşturmaktır

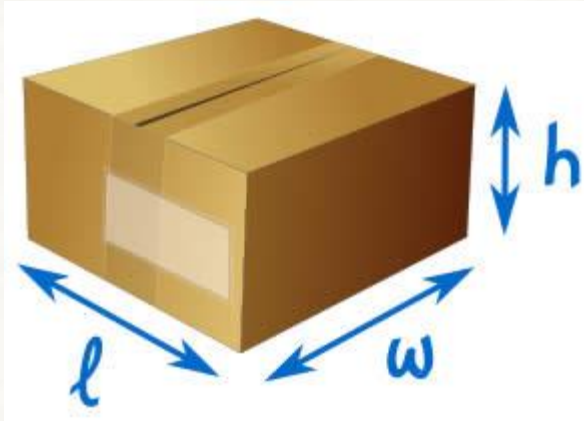
BASİT MATEMATİKSEL MODELLER

Basit Model 1

Aşağıdaki kutuyu gözönüne alalım. Bununla ilgili aşağıdaki hususları bilmek istiyoruz:

Kutunun Hacmi nedir?

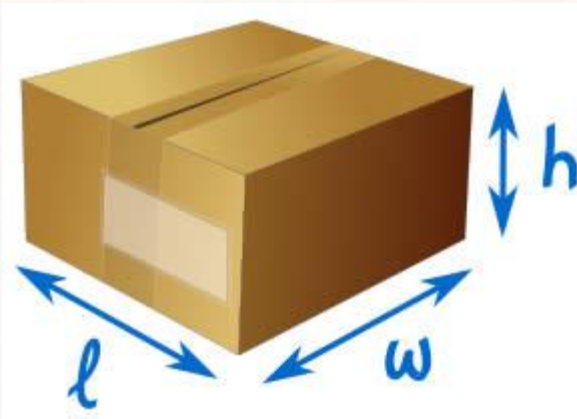
Kutunun içinde ne kadar boşluk var?



- **Ne biliyoruz?**
 - Üç kenarın uzunluğunu biliyoruz
 - h (yükseklik)
 - l (uzunluk)
 - w (genişlik)
- Bu üç kenarın çarpımı bize hacmi verir
 $Hacim = h \times l \times w$

BU BASİT BİR MATEMATİKSEL MODELDİR

Yukarıdaki Hesaplama GERÇEKMİ ?



Model gerçekte aynı değil,
Yaklaşım yaptık ve kabul edilebilir bir sonuç elde ettik

Kutunun kalınlığını (t) hesaba katmadık, dış kenar ölçülerden hacim hesabı yaptık.
İç kısımdan ölçüm yaparsak

- $h-t$ (yükseklik)
- $l-t$ (uzunluk)
- $w-t$ (genişlik)

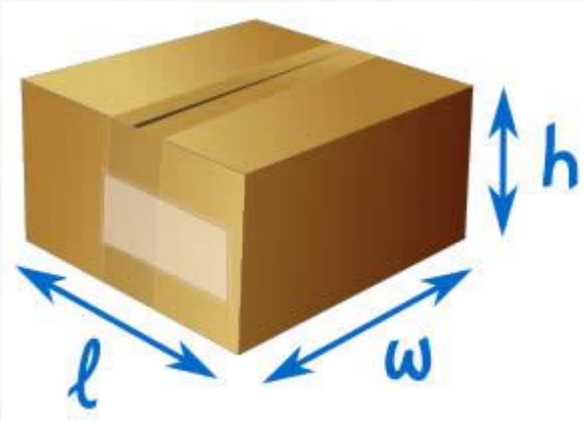
Bu durumda hacim

$$Hacim = (h-2t) \times (l-2t) \times (w-2t)$$

bağıntısı ile hesaplanır

BU gerçek durumu daha iyi gösterir. DAHA İYİ BİR MODEL ancak OPTİMUM değil.

Hesaplama GERÇEKMİ ?



- KUTU içindeki kullanılabilir hacim hesabı için modeli geliştirmemiz gerekir.
- **Kutuya yerleştireceğimiz nesne tamamen kutu ile uyumlu olmayabilir ve kutunun içinde kullanılmamış boşluk olabilir.**
- **Hesaplamalarda bu durumda gözönüne alınmalıdır.**

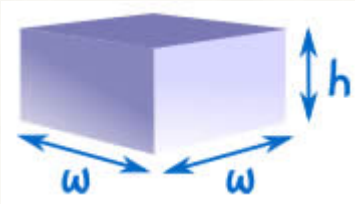
Basit Model 2

Bir şirket ihtiyacı olduğu karton kutuları kendisi yapacaktır.

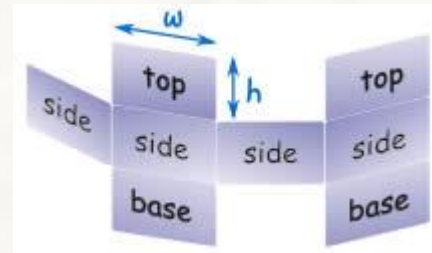
- Kutu **0.02m^3** hacminde olmalıdır. Bu hacim 20 litreye denk.
- Kutunun tabanı kare olmalı. Üst ve alt kısmı iki kat kalınlıkta olmalıdır. Kartonun maliyeti **$\$0.30 \text{ m}^2$** .
- En ekonomik boyut ne olmalıdır?

Önce çizerek gösterelim.

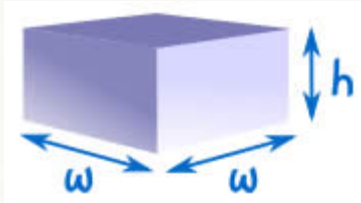
Kare tabanlı olacağı için genişlik ve uzunluk eşittir.



Kutunun açılmış hali aşağıdaki gibidir.



En Ekonomik Boyut için formüller

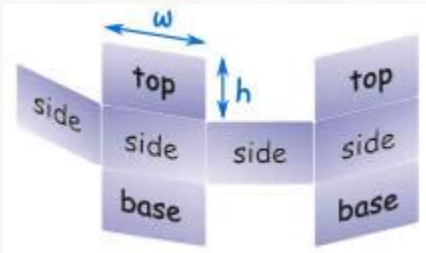


Hacim için;

$$\text{Hacim} = w \times w \times h = w^2 \times h$$

Hacim 0.2 m^3 olması gerektiğinden;

$$w^2 \times h = 0,2 \text{ m}^3$$

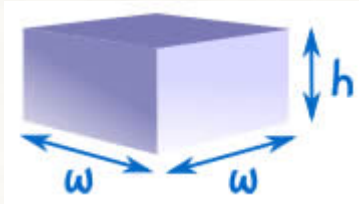


Bu kutunun alanı ise;

$$4 \text{ kenarın alanı} = 4 \times w \times h = 4wh$$

$$\text{Taban ve üst alanı} = 2 \times w \times w = 2w^2$$

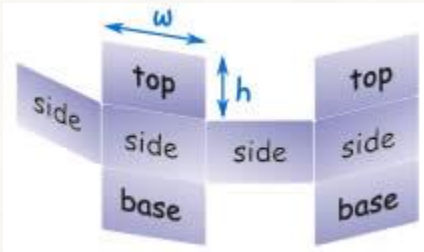
$$\text{Toplam alan} = 4wh + 2w^2 = 2(2wh + w^2)$$



Maliyet formülü ise;

$$\begin{aligned}\text{Maliyet} &= 0,3 \times \text{Toplam alan} \\ &= 0,3 \times [2 (2wh + w^2)] \\ &= 0,6(2wh + w^2)\end{aligned}$$

Eğer yükseklik ve genişliği biliyorsak maliyet hesaplanır.



Yükseklik ile genişlik arasındaki ilişki kullanılarak yükseklik aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$w^2h = 0,2 \Rightarrow h = 0,2/w^2$$

Bunu yerine yazarsak maliyet fonksiyonu elde edilir;

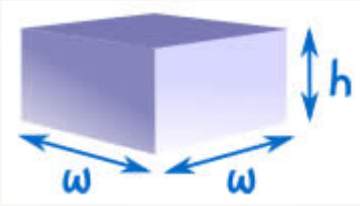
$$\text{Maliyet}(w) = 0,6(2(0,2/w) + w^2)$$

$$\text{Maliyet}(w) = (0,012/w) + 0,6w^2$$

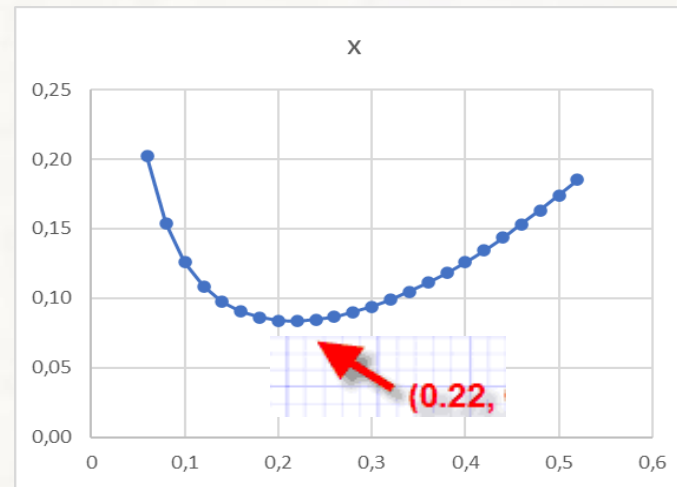
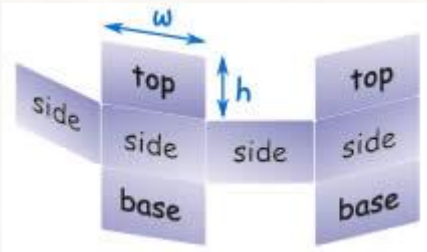
Basit Model 2

En Ekonomik Boyut için formüller

$$\text{Maliyet } (w) = (0,012/w) + 0,6w^2$$

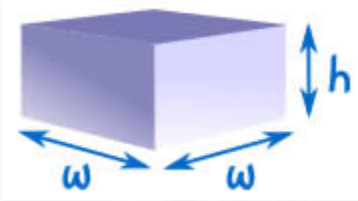


Bunun grafiğini çizersek:



Minimum maliyet için genişlik $w = 0,22m$ olmalıdır

Basit Model 2



Minimum maliyet için genişlik $w = 0,22m$ olmalıdır

Yükseklik $h = 0,2 / (0,22^2) = 0,413 \text{ m}$

Toplam alan $= 4wh + 2w^2 = 2(2wh + w^2)$

Kutu maliyeti $= 0,3 \times 2 \times (0,22 \times 0,413 + 0,22^2) = 0,083 \text{ TL}$

Bu model aşağıdaki hususlar göz önüne alınarak geliştirilir:

- Yapıştırma ve montaj maliyeti dahil edilir,
- Kartondan kutu keserken oluşan atıklar,
- Kutunun şekli paketleme, ve stok için uygunmu?
- Ve benzeri hususlar....

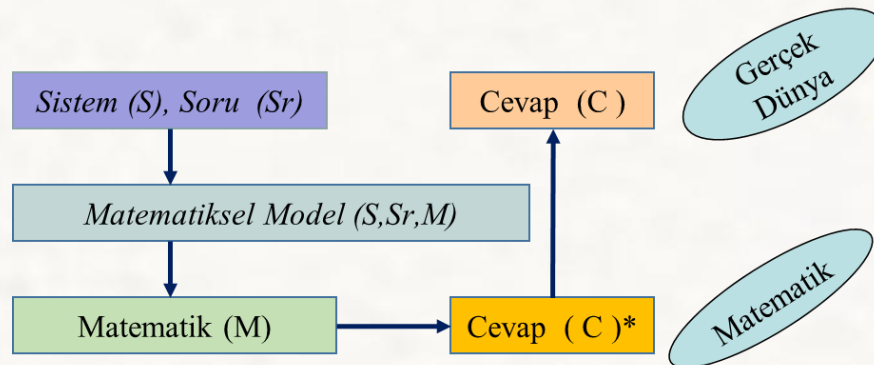
Matematiksel Model?

Matematiksel model, bir dizi matematiksel ifadedir.

$$M = \{ \Sigma_1, \Sigma_2, \dots \Sigma_n \}$$

Matematiksel model (S, Sr, M) , sistem (S) , sistemle ilgili sorular (Sr) ve sorulara (Sr) cevap vermek için kullanılacak matematiksel ifadeler (M) 'den meydana gelmiş bir üçlemedir.

Mesela, bir grup insanın ortalama yaşını bilmek istediğimiz zaman, S bir grup insanı, Sr onların ortalama yaşı sorusunu, ve M ortalama değer $x = (\Sigma_i x_i / n)$ formülünü tanımlar.



Matematiksel Model?

- Modelleme, gerçekliği ele almanın bir yoludur.
- Matematiksel model, gerçek bir durumun matematiksel ifadesidir.
- Bu model uygun şekilde analiz edilirse gerçek sistemi çok daha iyi anlaşılır
- Ayrıca, model oluştururken, sistemi yöneten faktörler ile sistem için çok önemli ve sistemin farklı yönlerinin ilişkilerini ortaya çıkaran faktörler göz önüne gelirler.
- Matematiksel modellemenin önemi temel bilimler, ekonomi ve endüstriyel problemlerde her geçen gün artmaktadır. Matematiksel modeller bir çok alanda kullanılabilirler:
 - a) Çelik endüstrisinde, hammaddeden nihai üretime kadar önemlidir. Külçe soğumanın kontrolü, fırında kütle ve ısı transferi, sıcak büküm mekanizması, vb. problemler.
 - b) Stresli ortamda bitkilerin büyümesi,
 - c) İklim değişikliği tahmini ve modellemesi,
 - d) Tedarik zinciri oluşturma,
 - e) Üretim planlaması,

Matematiksel Modelleme Esasları:

MM temel prensipleri aşağıdaki sorulara cevap bulmadır:

Niçin? Ne arıyoruz? Model için ihtiyacı belirle.

Bul? Neyi bilmek istiyoruz? Neler aradığımızın listesini yap.

Verilenler? Neleri biliyoruz? İlgili verileri belirle.

Kabul var mı? Neleri kabul edebiliriz? Kabul edilebilecek koşulları belirle.

Nasıl? Modele nasıl bakabiliriz? Kontrol eden fiziksel prensipleri belirle.

Tahmin? Modelimiz neyi tahmin edecek? Kullanılacak matematiksel bağıntıları, yapılacak hesaplamaları tanımla.

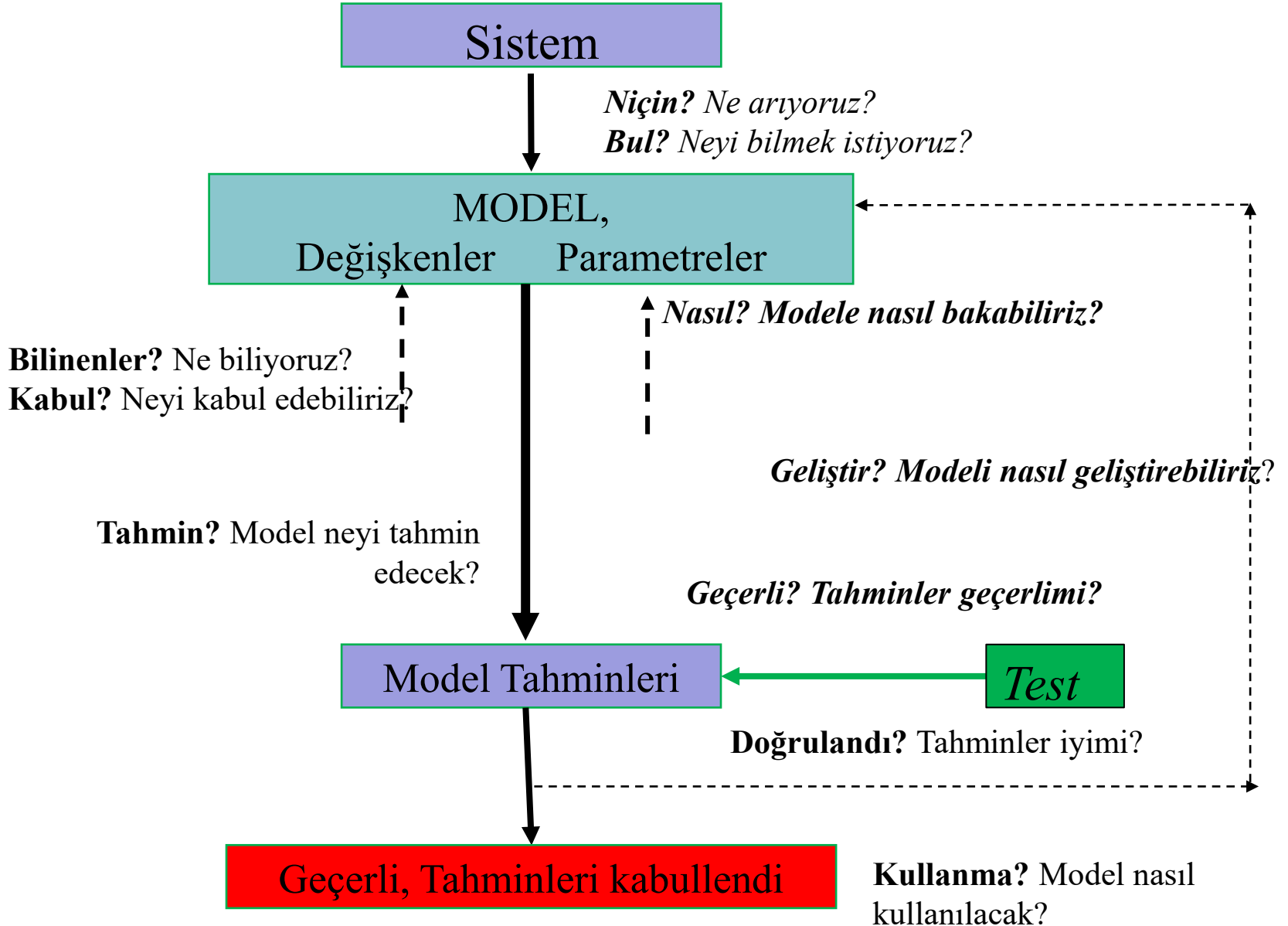
Geçerlimi? Tahminler geçerlimi? Modelin doğruluğunu kontrol edecek testleri tanımla.

Doğrulandı mı? Tahminler iyimi? Modeli doğrulayacak testleri tanımla.

İyileştirilebilir mi? Modeli iyileştirebilir miyiz?

Kullanılabilir mi? Modeli nasıl kullanabiliriz? Modelle ne yapacağız?

Matematiksel Modelleme



Model Oluşturma ve Çözme

Model Oluşturma Üç aşamalı bir işlemdir:

- 1. Problem Tanımı*
- 2. Veri Toplama*
- 3. Matematiksel Model*

Sonra Modele Çözüm elde edilmelidir.

1.Problem Tanımı

Sözel tanım yapılmalıdır.

Modellemenin en önemli ve en zor aşamasıdır.

Üç Bileşeni vardır:

➤ *Amacın net olarak belirlenmesi,*

➤ (1) “ürünlerimizin satışından gelecek çeyrekte karı maksimize etmek”, (2) “X işyerinde ortalama kesinti süresini en aza indirmek”, (3) “toplam üretim maliyetlerini en aza indirmek “ gibi

➤ *Amacı etkileyen faktörlerin tanımlanması*

➤ Bu faktörler ayrıca karar vericinin kontrol edebildiği ve kontrol edemediği faktörler olarak da sınıflandırılır.

➤ *Kısıtlamaların belirlenmesi*

➤ bir üretim sisteminde, kullanılabilir kaynak miktarı üretim seviyelerine dair sınırlamalar getirebilir.

2. Veri Toplama

Modelleme için gereklidir,
Farklı şekillerde elde edilir;

➤ *Sistem gözlemlenerek elde edilir*

- Sistem çalışırken gözlemlenerek, ölçülerek veya teknoloji kullanılarak veriler toplanır

➤ *Belirli standartlar vardır*

- maliyetle ilgili birçok bilgi bu kategoriye girme eğilimindedir

➤ *Otomatik Veri Toplama*

- Bilgisayar teknolojisi ve buna bağlı bilgi sistemlerindeki büyüme, otomatik veri depolama ve geri çağırmaya olanak tanımaktadır.
- Bu durum, “veri analisti” olarak tanımlanan yeni bir uzmanlık alanının gelişmesine sebep olmuştur. Veri yönetimi ve analizi, **veri analitik** olarak günümüzde oldukça yaygın bir hale gelmiştir.

3. Matematiksel Model

Dört ana unsuru vardır:

- Karar Değişkenleri....

- karar vericinin kontrolü altında olan belirli eylemleri modellemek için kullanılır.
- faaliyet seviyesini belirten matematiksel sembol (x),

- Kısıtlamalar...

- karar değişkeninin alabileceği değer aralığına sınırlar koymak için kullanılır

- Amaç fonksiyonu....

- sistemin performansın bazı ölçütlerinin (maliyet, kâr, zaman, gelir, kullanım vb.) matematiksel bir ifadesidir olup, karar değişkenlerinin bir fonksiyonu olarak ifade edilir.

- Parametreler...

- Amaç fonksiyonunda ve kısıtlarda kullanılan sabitler. Sistemle ilgili toplanan veriler bütünüdür.

Değişken Tanımlama

Bir matematiksel ifade (genellikle tek harf),

- eğer bir şeyin (fiziksel, ekonomik, geçici, vs...) değerinin yerine kullanılıyorsa değişken olarak tanımlanır.

Değişkenin **ROLÜ**, *geçici olarak bir şeyin yerini işgal etmektir.*

Örnek 1:

Eğer vergi oranı %22 ise, bir kişi ne kadar vergi öder?

Bu soruyu cevaplayabilmek için kişinin maaşını bilmek gerekir. Eğer maaş bilinmiyorsa, maaş yerine **DEĞİŞKEN** kullanılır.

Maaş değişkeni (X) aşağıdaki gibi tanımlanır.

X= kişinin aylık maaşı (TL/ay)

MATEMATİKSEL Modelleme

- Uygun problemi Matematiksel olarak modelleyebilmek için üç(3) soru sorulmalıdır.
- Soruların cevabı modellemeyi oluşturur,
 1. *Amaç nedir?*
 2. *Model ne arıyor?*
 3. *Değişkenler üzerindeki kısıtlamalar/sınırlamalar nelerdir?*

Bu soruların cevabı matematiksel ifadelerle tanımlanmalıdır

1.Soru: Problemin amacı nedir?

- Değişkenlerle ilgili ekonomik parametrenin ne olduğu önemli...
- Problemdeki ekonomik parametre kar/gelir olarak tanımlı
- Değişkenlerin değerini ölçen bir fonksiyon olmalı
- Birim fayda ile miktarın çarpımı toplam faydayı verir

Buna göre amaç fonksiyonu

Maks veya Min

şeklinde olmalıdır.

2.Soru : Model ne arıyor?

- Problemin *karar değişkenleri* nelerdir?

X_i*i faaliyetinin seviyesi (birim olmalı)*

Bir matematiksel ifade olup (genellikle tek bir harf), bilinmiyen değeri (fiziksel, ekonomik, geçici, vs.) tanımlamaktadır .
Değişkenin rolü değer alacak bir pozisyonu işgal etmektir.

Örnek 1:

Eğer vergi oranı %40 ise bir kişi ne kadar vergi öder?

Bu soruyu cevaplayabilmek için kişinin maaşını bilmek gerekir. Eğer kişinin maaşı bilinmiyorsa, maaş değişkenle ifade edilir.

x kişinin yıllık maaşı

Buna göre vergi ;

$$\text{Vergi} = 0,4x$$

bağıntısı ile hesaplanır.

Örnek 2:

Bir mobilyacı çam masayı 650TL'den, meşe masayı 750 TL'den ve ceviz masayı ise 850 TL'den satmaktadır. Mobilyacının yıllık geliri nedir?

Bu soruyu çözmek için her bir masadan yılda kaç tane üretilip sattığını bilmemiz gerekiyor. Bunlar değişken olarak tanımlanır.

X : Çam masa miktarı (adet/yıl)

Y : Meşe masa miktarı (adet/yıl)

Z : Ceviz masa miktarı (adet/yıl)

Buna göre ;

$$\text{Toplam Gelir} = 650X + 750Y + 850Z$$

bağıntısı ile hesaplanır.

3.Soru : Problemin kısıtları nelerdir?

- Problemin kısıtları nelerdir?
 - *Değişkenlerin* herhangi bir değeri almasını neler engellemektedir?

Modelin Çözümü

- Sistemin modellemesi ile matematiksel modele çözüm bulmak farklıdır.
- Bunun manası, modellemek için profesyonel matematikçi olmak gerekli değildir.
- Çözüm için ise değişik yaklaşımlar mevcuttur.

Çözüm teknikleri dört kategoriye ayrılır;

➤ *Simülasyon*

➤ *Matematiksel Analiz Teknikleri (regresyon, kuyruk, vs.)*

➤ *Optimum Çözüm Teknikleri*

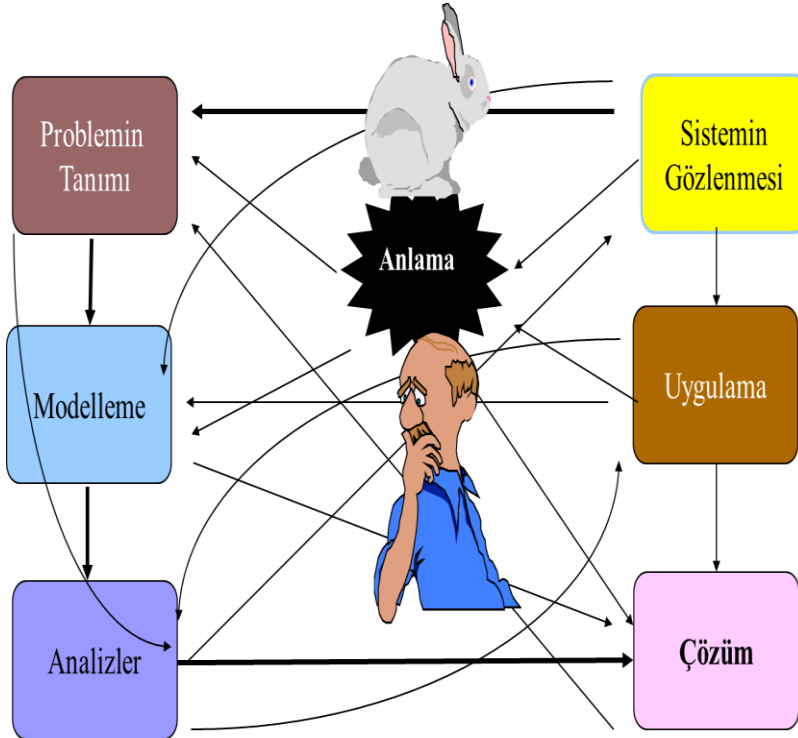
➤ *Sezgisel Teknikler*

➤ *Sezgisel*

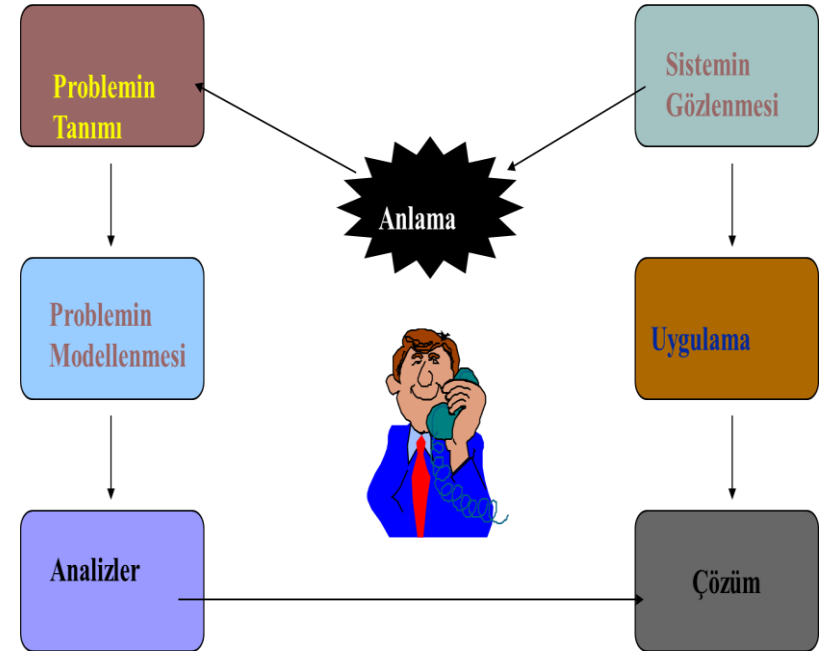
➤ *Meta-Sezgisel*

Gerçek Durum-Model

Gerçek Dünya

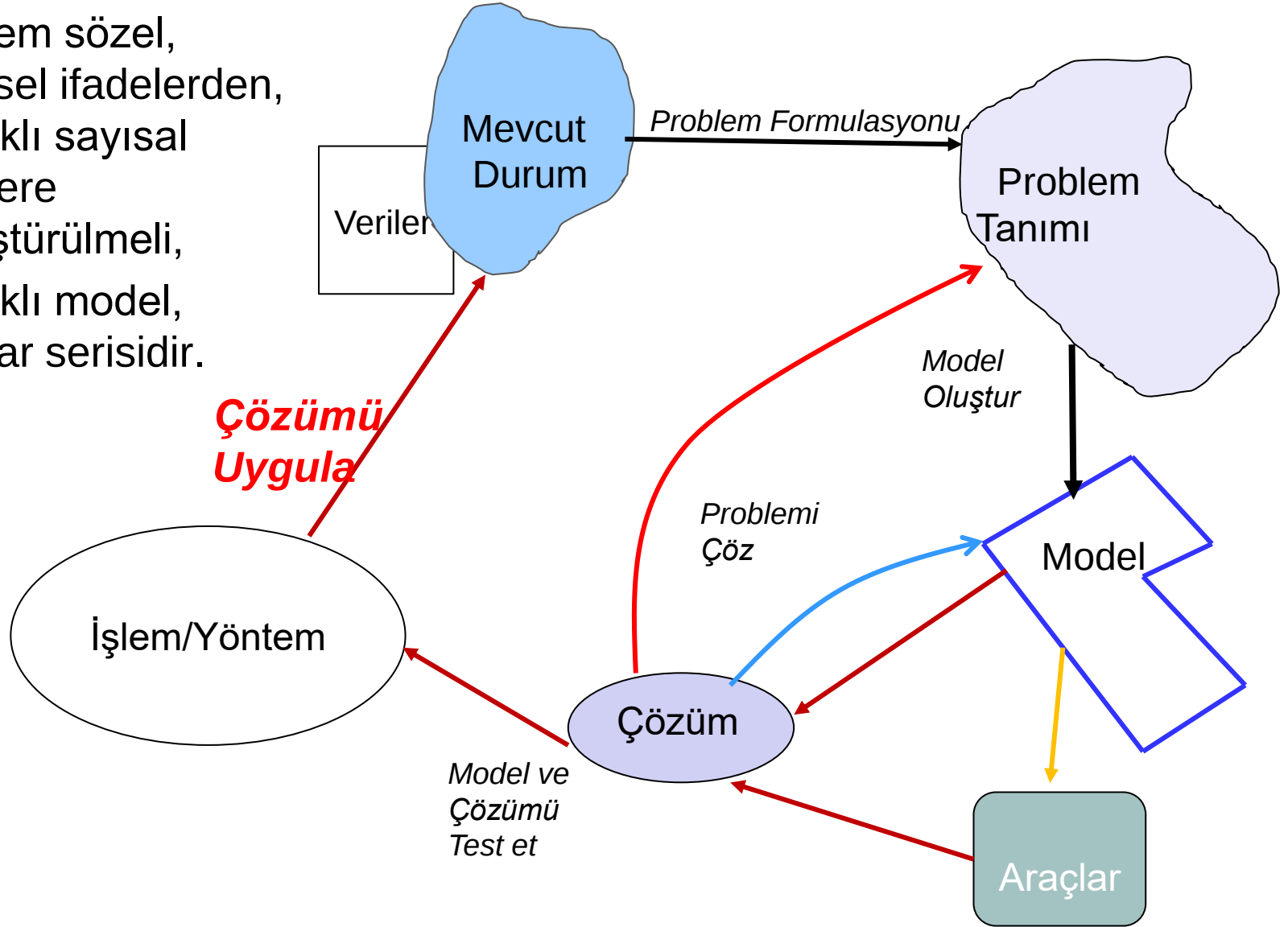


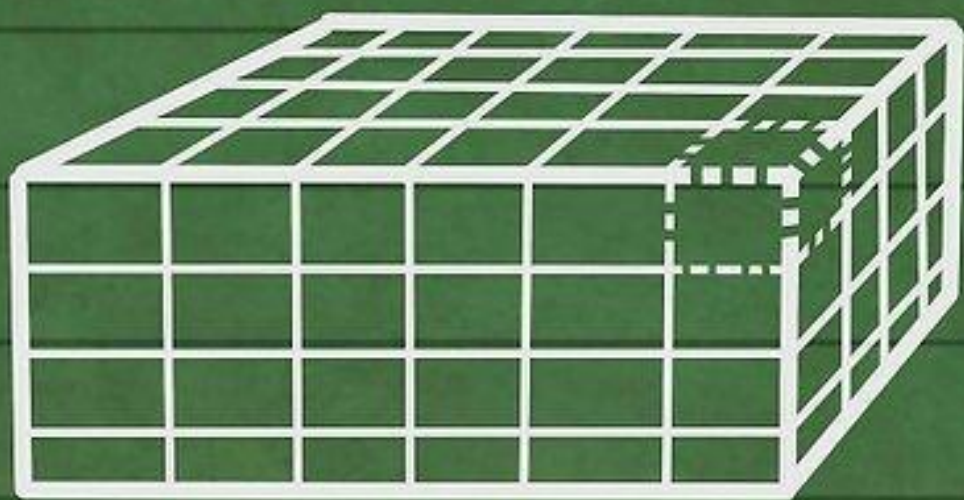
Model



Model

- Problem sözel, kalitesel ifadelerden, mantıklı sayısal ifadelere dönüştürülmeli,
- Mantıklı model, kurallar serisidir.





$$V_{\text{cube}} = h \times w \times l$$

