

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

SIMPLEKS METOD (YAPAY DEĞİŞKENLER)

YAPAY DEĞİŞKENLER METODU

- Bundan önceki örneklerde kısıtlar ' \leq ' şeklinde idi.
- Bu durumda 0 noktası bilinen çözüm olduğu için başlangıç temel çözüm elde edilmekteydi
- Ancak gerçek problemler ' $=$ ' veya ' \geq ' şeklinde de kısıtlar içermektedir.
- Bu durumda 0 noktası temel çözüm olmayabilir.
- Bu tür problemleri çözmek için "*Yapay Değişkenler*" Metodu kullanılır.
- Bu metodun temelinde problemi çözmek için bir başlangıç çözümü bulmak yatar.

Yapay değişkenler

Burada iki yeni değişken tanımlanır:

► Fazlalık değişken $(-f_i)$ ve Yapay değişken (R_i)

Bu değişkenler \geq ve $=$ şeklindeki kısıtlara eklenir

$$X_j \geq b_i \quad \text{ise} \quad X_j - f_i + R_i = b_i \quad \text{haline getirilir}$$

$$X_j = b_i \quad \text{ise} \quad X_j + R_i = b_i \quad \text{haline getirilir}$$

Yapay Değişkenler

- İki Önemli Yöntem Vardır:
 - Büyük-M yöntemi (Penalty Method)
 - İki-Aşamalı Yöntem (Two-Phase Method)
- Her iki yöntemde aynı sonucu verir,
- Hangisinin seçileceği tamamen keyfidir

Büyük-M Metodu

- Yapay değişkenler çok büyük olan M sayısı ile çarpılır,
- Elde edilen çarpım;
 - ➡ min probleminde amaç fonksiyonuna eklenir,
 - ➡ maks probleminde ise amaç fonksiyonundan çıkarılır

$$\text{Min } CX$$

$$\text{Kısıtlar } AX = b$$

$$X \geq 0$$

$$\text{Min } CX + MR$$

$$\text{Kısıtlar } AX + R = b$$

$$X, R \geq 0$$

Büyük-M Metodu Örnek

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$$

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$$

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - F_1 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 4$$

$$X_1, X_2, F, S, R \geq 0$$

$$R_1 = 3 - 3X_1 - X_2$$

$$R_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + F_1$$



$$R_1 + R_2 = 3 - 3X_1 - X_2 + 6 - 4X_1 - 3X_2 + F_1$$

$$R_1 + R_2 = 9 - 7X_1 - 4X_2 + F_1$$

Ve buradan

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2 = 4X_1 + X_2 + M(R_1 + R_2)$$

$$= 4X_1 + X_2 + M(9 - 7X_1 - 4X_2 + F_1)$$

$$= (4 - 7M)X_1 + (1 - 4M)X_2 + MF_1 + 9M$$

➤ Yeni amaç fonksiyonu ile tabloyu oluşturursak;

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	9M
R1	0	3	1	0	1	0	0	3
R2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S1	0	1	2	0	0	0	1	4

➤ Çözüm

➤ $Z = 9M$

➤ $\{X1, X2, S1, R1, R2, F1\} = \{0, 0, 4, 3, 6, 0\}$

➤ Anahtar sütun ve satırı bulalım;

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	9M
R1	0	3	1	0	1	0	0	3
R2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S1	0	1	2	0	0	0	1	4

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	9M
R1	0	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S1	0	1	2	0	0	0	1	4

➤ Anahtar sütun ve satırı bulalım;

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	$-4+7M$	$-1+4M$	$-M$	0	0	0	9M
X1	0	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S1	0	1	2	0	0	0	1	4

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	0	$(1+5M)/3$	$-M$	$(4-7M)/3$	0	0	$4+2M$
X1	0	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
R2	0	0	$5/3$	-1	$-4/3$	1	0	2
S1	0	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	3

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	0	$(1+5M)/3$	-M	$(4-7M)/3$	0	0	$4+2M$
X1	0	1	$1/3$	0	$1/3$	0	0	1
X2	0	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
S1	0	0	$5/3$	0	$-1/3$	0	1	3

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	0	0	$1/5$	$(8/5-M)$	$(-1/5)-M$	0	$18/5$
X1	0	1	0	$1/5$	$3/5$	$-1/5$	0	$3/5$
X2	0	0	1	$-3/5$	$-4/5$	$3/5$	0	$6/5$
S1	0	0	0	1	1	-1	1	1

- Artık yapay değişkenler(R1 ve R2) 0(sıfır) olduğu için onların bulunduğu sütunlar tablodan çıkarılır.

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	0	0	1/5			0	18/5
X1	0	1	0	1/5			0	3/5
X2	0	0	1	-3/5			0	6/5
S1	0	0	0	1			1	1

- $Z = 18/5$
- $\{X1, X2, F1, S1, R1, R2\} = \{3/5, 6/5, 0, 1, 0, 0\}$
- Tabloda Z satırı kontrol edildiğinde F1 sütununda pozitif değer olduğu için optimum çözüme ulaşılmamıştır. Yapay değişken sütunları çıkarılarak işlemler tekrar edilir.

Temel	Z	X1	X2	<i>F1</i>	S1	Çözüm
Z	1	0	0	<i>1/5</i>	0	18/5
X1	0	1	0	<i>1/5</i>	0	3/5
X2	0	0	1	<i>-3/5</i>	0	6/5
<i>S1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

Temel	Z	X1	X2	F1	S1	Çözüm
Z	1	0	0	0	-1/5	17/5=3,4
X1	0	1	0	0	-1/5	2/5=0,4
X2	0	0	1	0	3/5	9/5=1,8
F1	0	0	0	1	1	1

➤ $Z = 17/5$

➤ $\{X1, X2, F1, S1\} = \{2/5, 9/5, 1, 1\}$

İki-Aşamalı Metot

I.Aşama

- Bu aşamada öncelikle yapay değişkenlerden yeni bir amaç fonksiyonu yazılır

- $\text{Min } r = R1 + R2$

- Yapay değişkenlerin değeri yerine yazılarak amaç fonksiyonu tamamlanır ve tablo oluşturulur

- 1.Aşamada amaç yeni amaç fonksiyonun değerini sıfıra eşitlemektir.

İki-Aşamalı Metot Örnek

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$$

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$$

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - F_1 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 4$$

$$X_1, X_2, F, S, R \geq 0$$

$$R_1 = 3 - 3X_1 - X_2$$

$$R_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + F_1$$

$$R_1 + R_2 = 3 - 3X_1 - X_2 + 6 - 4X_1 - 3X_2 + F_1$$

$$R_1 + R_2 = 9 - 7X_1 - 4X_2 + F_1$$

ve buradan

$$\text{Min } r = -7X_1 - 4X_2 + F_1 + 9$$

$$\text{Min } r + 7X_1 + 4X_2 - F_1 = 9$$

➤ Yeni amaç fonksiyonu ile tabloyu oluşturursak;

Temel	r	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
r	1	7	4	-1	0	0	0	9
R1	0	3	1	0	1	0	0	3
R2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S1	0	1	2	0	0	0	1	4

➤ Çözüm

➤ $r = 9$

➤ $\{X1, X2, S1, R1, R2, F1\} = \{0, 0, 4, 3, 6, 0\}$

➤ Anahtar sütun ve satırı bulalım;

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
r	1	7	4	-1	0	0	0	9
R1	0	3	1	0	1	0	0	3
R2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S1	0	1	2	0	0	0	1	4

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
r	1	7	4	-1	0	0	0	9
R1	0	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S1	0	1	2	0	0	0	1	4

➤ Anahtar sütun ve satırı bulalım;

Temel	r	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
r	1	7	4	-1	0	0	0	9
X1	0	1	1/3	0	1/3	0	0	1
R2	0	4	3	-1	0	1	0	6
S1	0	1	2	0	0	0	1	4

Temel	r	X1		X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
r	1	0		5/3	-1	-7/3	0	0	2
X1	0	1		1/3	0	1/3	0	0	1
R2	0	0		5/3	-1	-4/3	1	0	2
S1	0	0		5/3	0	-1/3	0	1	3

Temel	r	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
r	1	0	5/3	-1	-7/3	0	0	2
X1	0	1	1/3	0	1/3	0	0	1
X2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S1	0	0	5/3	0	-1/3	0	1	3

Temel	r	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
r	1	0	0	0	-1	-1	0	0
X1	0	1	0	1/5	3/5	-1/5	0	3/5
X2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S1	0	0	0	1	1	-1	1	1

- Artık yapay değişkenler(R1 ve R2) ve amaç fonksiyonu 0(sıfır) olduğu için yapay değişkenler tablodan çıkarılır ve II. Aşamaya geçilir.

- II. Aşamada öncelikle orijinal amaç fonksiyonu yerine yazılır ve uygun olmayan değerler uygun hale getirilir.
- Bu durumda Z satırı uygun hale getirilmelidir

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	-4	-1	0			0	0
X1	0	1	0	1/5			0	3/5
X2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S1	0	0	0	1			1	1

Temel	Z	X1	X2	F1	R1	R2	S1	Çözüm
Z	1	0	0	1/5			0	18/5
X1	0	1	0	1/5			0	3/5
X2	0	0	1	-3/5	-4/5	3/5	0	6/5
S1	0	0	0	1			1	1

- II. Aşamada öncelikle orijinal amaç fonksiyonu yerine yazılır ve uygun olmayan değerler uygun hale getirilir.

Temel	Z	X1	X2	F1	S1	Çözüm
Z	1	0	0	1/5	0	18/5
X1	0	1	0	1/5	0	3/5
X2	0	0	1	-3/5	0	6/5
S1	0	0	0	1	1	1

➤ $Z = 18/5$

➤ $\{X1, X2, F1, S1, R1, R2\} = \{3/5, 6/5, 0, 1, 0, 0\}$

Temel	Z	X1	X2	<i>F1</i>	S1	Çözüm
Z	1	0	0	<i>1/5</i>	0	18/5
X1	0	1	0	<i>1/5</i>	0	3/5
X2	0	0	1	<i>-3/5</i>	0	6/5
<i>S1</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>0</i>	<i>1</i>	<i>1</i>	<i>1</i>

Temel	Z	X1	X2	F1	S1	Çözüm
Z	1	0	0	0	-1/5	17/5=3,4
X1	0	1	0	0	-1/5	2/5=0,4
X2	0	0	1	0	3/5	9/5=1,8
F1	0	0	0	1	1	1

➤ $Z = 17/5$

➤ $\{X1, X2, F1, S1\} = \{2/5, 9/5, 1, 0\}$

The image features two 3D human models, one on the left and one on the right, facing each other. Their bodies are composed of various colored segments: red for the head, pink for the chest, yellow for the abdomen, green for the legs, and blue for the feet. Numerous thin, colored lines connect corresponding segments between the two models, creating a web of connections. A central yellow rectangular box contains the text 'SORULAR !!!!!!!!!!!'.

SORULAR !!!!!!!!!!!