

Doğrusal programlama Hassaslık Analizi

İKİZLİLİK ve HASSASLIK ANALİZİ

- Tüm DP problemlerinde, onunla bağlantılı ve eşzamanlı çözülen *ikiz(dual) olarak tanımlanan* ikinci bir doğrusal programlama problemi vardır,
- Birinin çözümü aynı zamanda diğerinin de çözümüdür,
- İkiz problemin rolü asıl problemin ekonomik yorumuna katkısıdır
- Asıl problemin ikizi aşağıdaki gibi gösterilir...

1

1

2

2

Asıl Problem → İkiz Problem

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum c_j x_j & \text{Maks } W &= \sum y_i b_i \\ \sum a_{ij} x_j &= b_i & \sum a_{ij} y_i &\leq c_j \\ x_j &\geq 0 & y_i &\text{ serbest} \end{aligned}$$

Kurallar:

1. Asıl problemin kaynak miktarı , ikiz problemin amaç fonksiyonu katsayısıdır,
2. Asıl problem amaç fonksiyonu katsayıları , ikiz problem için kaynak miktarını ifade eder,
3. Asıl Problem min ise ikiz problem maksimizasyondur,
4. İkiz problem kısıtları *maksimizasyon için* "<=", *minimizasyon için ise* ">=" şeklindedir.

3

3

Asıl Problem → İkiz Problem

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 & \text{Maks } W &= 10y_1 + 8y_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 & y_1 + 2y_2 &\leq 5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 8 & 2y_1 - y_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 & y_1, y_2 &\text{ serbest} \end{aligned}$$

4

4

İkiz Problem Ekonomik Yorum

Her iki problemin amaç fonksiyonu değeri aynı olduğu için

$$Z=W \rightarrow \sum c_j x_j = \sum b_i y_i \text{ yazılır}$$

Bunun sözel ifadesi;

$$\text{Fayda} = \text{Kaynak miktarı} \times (\text{değer/birimkaynak})$$

Burada y_i ikiz fiyat veya gölge fiyat olarak tanımlanır.

5

5

Gölge Fiyat (Shadow Price)

- Gölge Fiyat/İkiz fiyat kaynağın marjinal değerini ölçer,
- Herhangi bir i kaynağının miktarında yapılacak değişikliğin Z 'yi artırma oranıdır.
- i kaynağının gölge fiyatının pozitif olması, i kaynağından daha fazla kullanılarak Z 'nin değerinin artacağını gösterir.
- Gölge fiyatın sıfır olması ise i kaynağından fazlalık olduğunu gösterir.

6

6

Azaltılmış Maliyet (*Reduced cost*)

- Bir faaliyetin amaç fonksiyonuna marjinal katkısı ile o faaliyet için kullanılacak kaynakların marjinal değeri arasındaki farktır.
- Temel olmayan değişkenin amaç fonksiyonundaki katsayısını değiştirirsenin DP'nin optimum çözümü nasıl etkiliyeceğini belirtir.
- Temel değişkenler için azaltılmış maliyet sıfır olmalıdır. Niçin?
 - Min problemlerde Temel olmayan değişkenlerden herhangi birinin miktarını artırmak amaç fonksiyonun değerini artıracaktır,
 - Maks problemlerde Temel olmayan değişkenlerden herhangi birinin miktarını artırmak amaç fonksiyonun değerini artıracaktır,

7

Hassaslık Analizi

DP parametrelerinin herhangi birinde meydana gelen değişimin optimum çözüm üzerindeki etkisini belirlemek için yapılır,

- Amaç fonksiyonun katsayıları (c_j) değişimi.....?
- Kaynak miktarı (b_j) değişimi?
- Faaliyetin kaynak kullanım oranı (a_{ij}) değişimi..
- Sisteme yeni bir faaliyet eklenirse ne olur?
- Sisteme yeni bir kısıt eklenirse ne olur ?

Hassaslık analizi ile tüm bu değişimler incelenir

8

Hassaslık Analizi için Tablo Gösterimi

Değişken		Z	Orjinal Değişkenler	Boş/Aylak Değişkenler	Sağ Taraf (Çözüm)
Başlangıç Tablosu	0	1	-c	0	0
	1... n	0	A	I	b
Optimum Tablo	0	1	$y'A-c$	y'	$Z=y'b$
	1... n	0	$A'=S'A$	S'	$b'=S'b$

9

Kaynak miktarı (b_j) değişimi

Kaynak miktarı değişince;

- Amaç fonksiyonu değeri, ve
- Sağ taraf (çözüm) kümesi değişir

$$Z^*=y^*b \quad \text{ve} \quad b^*=S^*b'$$

Tüm $b^* \geq 0$ ise optimum tablo değişmemiştir

Değişim miktarını bulmak için ise;

Tüm i ler için ayrı ayrı

$$b_i^* + s_{ij} + \Delta b_i = 0$$

bağıntısı kullanılarak bulunur

10

Birim faydada (c_j) meydana gelen değişim

Birim fayda miktarı değişince;

- Amaç fonksiyonunun değeri ,
- Optimum tablonun Z satırı ve
- ikiz problemin kısıtları kontrol edilir.

Bunlarda optimumluğu etkileyen bir durum yoksa değişim optimum tabloyu değiştirmez.

Optimum tabloyu değiştirmeden birim fayda meydana gelebilecek değişim ise ikiz problemin kısıtı kontrol edilerek bulunur.

$$a_{ij}y_i \geq c_j \Rightarrow a_{ij}y_i = c_j + \Delta c_j$$

eşitliğini sağlayan Δc_j değeri değişim aralığını verir

11

Faaliyetin kaynak kullanım oranı (a_{ij}) değişimi

İki durum söz konusudur;

1. Temel değişken olan faaliyet te meydana gelen değişim, ve
2. Temel olmayan faaliyette meydana gelen değişim

Birinci durumda değişim optimum tablonun

- Z satırında, ve
- A' matrisinde değişime sebep olur.

Bunlar kontrol edilerek optimum çözümün değişip değişmediği kontrol edilir,

İkinci durumda ise ikiz problemin kısıtı kontrol edilir.

$$a_{ij}y_i \geq c_j$$

Eğer kısıt sağlanıyorsa çözüm hala optimumdur.

12

Sisteme yeni bir faaliyet eklenmesi

Bu durumda aynı anda çoklu parametre değeri değişmiş olur.

- Sanki orijinal durumda tüm parametreler sıfır(0)'a eşitmiş kabul edilir.
- Tabloya yeni bir sütun eklenir ve orijinal tabloda bu sütun değerleri (c ve a_{ij}) sıfır kabul edilir.
- Sonra tablo düzenlenir ve parametrelerdeki değişim tek tek incelenir.

13

13

Sisteme yeni bir kısıt eklenmesi

► Bu durumda optimum tabloya;

- Yeni bir satır ve
- Yeni bir aykık değişken kolonu eklenir ve bu tablo öncelikle uygun hale getirilir.

• Eğer uygun hale getirilen tablo;

- optimumluk koşullarını sağlıyorsa mevcut tablo optimum tablo olarak kullanılır.
- Aksi durumda gerekli işlemler yapılarak yeni optimum tablo belirlenir.

14

14

Dual-Simpleks Yöntemi

- Bu algoritma daha çok optimum ancak uygun olmayan bir çözümle başlar.
- En az bir uygun olmayan (<0) temel değişkenin olduğu problemler için uygun bir yöntemdir .
- Uygun olmayan temel değişkenin olduğu satır ile temel olmayan değişkenler sütunun kesiştiği negatif elemanlar seçilir,
- Bunlardan $\min\{(z_j - c_j)/a_{ij}\}$ 'yi veren sütun anahtar sütun olarak seçilir. Bu aynı zamanda yeni temel değişken olacaktır
- Simpleks yöntemdeki gibi uygun tablo için cebirsel işlemler yapılır

15

15

Örnek 7.1. (Sayfa 149-4.7b_6)

Maks $Z = 10x_1 + 12x_2 - 2x_3$

Kısıtlar

$X_1 + 2x_2 - x_3 \leq 320$ (işçilik süresi)

$3x_1 + x_2 \leq 350$ (Hammadde)

$x_3 \leq 10$ (Fazla mesai)

Optimum Tablo

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Çöz
Z	0	0	0	5.2	1.6	3.2	2256
X_2	0	1	0	0.6	-0.2	0.6	128
X_1	1	0	0	-0.2	0.4	-0.2	74
X_3	0	0	1	0	0	1	10

16

16

Kaynak değişim aralığını bulma (b_1)

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = S^* b = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 320 + \Delta b_1 \\ 350 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = S^* b = \begin{pmatrix} 192 + 0.6\Delta b_1 - 70 + 6 \\ -64 - 0.2\Delta b_1 + 140 - 2 \\ 0 + 0 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 + 0.6\Delta b_1 \\ 74 - 0.2\Delta b_1 \\ 10 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bunları ayrı ayrı yazarsak

$$128 + 0.6\Delta b_1 = 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq (-128/0.6) = -213$$

$$74 - 0.2\Delta b_1 = 0 \Rightarrow \Delta b_1 \geq (-74/-0.2) = 370$$

$$-213 \leq \Delta b_1 \leq 370$$

bu durumda işçilik süresi

$$107 \leq b_1 \leq 690 \text{ saat arasındadır}$$

15

17

Kaynak değişim aralığını bulma (b_1)

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = S^* b = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 320 \\ 350 + \Delta b_2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = S^* b = \begin{pmatrix} 192 - 0.2\Delta b_2 - 70 + 6 \\ -64 + 0.4\Delta b_2 + 140 - 2 \\ 0 + 0 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 128 - 0.2\Delta b_2 \\ 74 + 0.4\Delta b_2 \\ 10 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bunları ayrı ayrı yazarsak

$$128 - 0.2\Delta b_2 = 0 \Rightarrow \Delta b_2 \geq (-128/-0.2) = 640$$

$$74 + 0.4\Delta b_2 = 0 \Rightarrow \Delta b_2 \geq (-74/0.4) = -185$$

$$-185 \leq \Delta b_2 \leq 640$$

bu durumda hammadde

$$165 \leq b_2 \leq 990 \text{ saat arasındadır}$$

18

18

Kaynak değişim aralığını bulma

$$\begin{pmatrix} X2 \\ X1 \\ X3 \end{pmatrix} = S^{-1}b = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 320 \\ 350 + \Delta b2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

● Fazla mesai için ise

$$b1^* + 0.6\Delta b3 \geq 0 \Rightarrow \Delta b3 = -128 / 0.6 = -213$$

$$b2^* - 0.2\Delta b3 \geq 0 \Rightarrow \Delta b3 = 74 / 0.2 = 370$$

$$b3^* + 1\Delta b3 \geq 0 \Rightarrow \Delta b3 = -10 / 1 = -10$$

$-10 \leq \Delta b2 \leq 370$ bu durumda fazla mesai

$0 \leq b3 \leq 380$ birim arasındadır

19

19

Problemin Excel Solver Çözümü

Microsoft Excel 14.0 Duyarlılık Raporu
Çalışma Sayfası: [yapay_teknikcözümler]sayfa150
Rapor Oluşturuldu: 3.11.2014 12:52:36

Değişken Hücreleri

Hücre	Ad	Son Değer	Azaltılmış Maliyet	Hedef Katsayı	İzin Verilen Artış	İzin Verilen Azalış
\$D\$8	Sonuclar x1	74	0	10	16	4
\$E\$8	Sonuclar x2	128	0	12	8	5,3
\$F\$8	Sonuclar x3	10	0	-2	1E+30	3,2

Kısıtlamalar

Hücre	Ad	Son Değer	Gölge Ücret	Kısıtlama Sağ Taraf	İzin Verilen Artış	İzin Verilen Azalış
\$H\$9	İşçilik	320	5,2	320	370	213,3
\$H\$10	Hammadde	350	1,6	350	640	185
\$H\$11	Mesai	10	3,2	10	370	10

20

20

- Bu problemde fazla mesai ücreti 2 TL/saat'tir.
 - İşçilik ücreti gölge fiyatı 5,2 TL/saat, fazla mesai gölge fiyatı 3,2 TL/saat'tir.
 - Fazla mesai için zaten 2 TL/saat ödendiği için toplamda işçilik ücreti marjinal değeri 5,2 TL/saat olarak ortaya çıkar.
- Firma eğer 1,5TL/kg'dan günde 100 kg hammadde bulursa bunu almalı mıdır? Hammadde fiyatı 2 TL/kg olsa ne yapardınız?
 - Hammadde ikiz fiyatı 1,6 TL/kg olduğu için ve de fazla hammaddeyi kullanabileceği için alması uygundur.
 - Ancak 2 TL/kg fiyatı uygun değildir. Niçin?

21

21

- Hammadde temininde sorun olup sadece 200 kg/gün temin edebilirse optimum çözüm ne olur?

$$\begin{pmatrix} X2 \\ X1 \\ X3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 320 \\ 350 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 192 - 40 + 6 \\ -64 + 80 - 2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 158 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Bu durumda amaç fonksiyonu değeri

$$Z = 10 \times 14 + 12 \times 158 - 2 \times 10 \\ = 2034$$

Hammadde azaldığı için toplam fayda da azalmıştır.

22

22

- Fazla mesai en fazla 8 saat ise yeni optimum çözüm ne olur?

$$\begin{pmatrix} X2 \\ X1 \\ X3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 & -0.2 & 0.6 \\ -0.2 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 320 \\ 350 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 122 + 4,8 \\ 76 - 1,6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 126,8 \\ 74,4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Bu durumda amaç fonksiyonu değeri

$$Z = 10 \times 74,4 + 12 \times 126,8 - 2 \times 8 \\ = 2249,6$$

fayda biraz azalmıştır.

23

23

Örnek 7.2

- Anderson Elektronik firması gelir seviyesi düşük müşteriler için MP3, Uydu Radyo, LCD Tv ve Blu-Ray DVD player üretmektedir. Elektronik parçalar 7TL/adet, nonElektronik parçalar 5TL/adet ve montaj maliyetinde 10 TL/saat'tir.
- Her üründen elde edilecek kar ise satış fiyatı eksi maliyet bağıntısı ile bulunmuş olup, karlar sırayla 29, 32, 72 ve 54 TL/adet olarak hesaplanmıştır. Problemin diğer verileri aşağıda verilmiştir.

	MP3	Uydu Radyo	LCD TV	BLU-RAY	Kaynak
Elektronik Parça	3	4	4	3	4700
Elektronik Olmayan Parça	2	2	4	3	4500
Montaj süresi	1	1	3	2	2500
Maliyet	41	48	78	56	
Satış Fiyatı	70	80	150	110	

24

24

Elektronik Üretimi						
	X1	X2	X3	X4		
	41	48	78	56		
Elekt.	3	4	4	3	≤	4700
Elekt. Değişil	2	2	4	3	≤	4500
Montaj Süresi	1	1	3	2	≤	2500

Objective Cell (Max)				
Cell Name	Original Value	Final Value		
\$H\$5	69400	69400		
Değişkenler				
Cell Name	Original Value	Final Value	Integer	
\$B\$5 X1	0	0	ContIn	
\$C\$5 X2	380	380	ContIn	
\$D\$5 X3	0	0	ContIn	
\$E\$5 X4	1060	1060	ContIn	
Constraints				
Cell Name	Cell Value	Formula	Status	Stack
\$H\$6 ≤	4700	\$H\$6<=<\$G\$6	Binding	0
\$H\$7 ≤	3940	\$H\$7<=<\$G\$7	Not Binding	560
\$H\$8 ≤	2500	\$H\$8<=<\$G\$8	Binding	0

25

25

Değişkenler						
Cell Name	Final Value	Azaltılmış Maliyet	Amaç Katsayısı	Müsaade Edilen Artış	Müsaade Edilen Azalış	
\$B\$5 X1	0	-1	29	1		1E+30
\$C\$5 X2	380	0	32	40		1,66
\$D\$5 X3	0	-8	72	8		1E+30
\$E\$5 X4	1060	0	54	10		5
Kısıtlar						
Cell Name	Final Value	Gölge Fiyat	Constraint R.H. Side	Müsaade Edilen Artış	Müsaade Edilen Azalış	
\$H\$6 ≤	4700	2	4700	2800		950
\$H\$7 ≤	3940	0	4500	1E+30		560
\$H\$8 ≤	2500	24	2500	466,66		1325

26

26

Hassaslık Analizi Soruları

- Elektronik parça tedarığı 400 adet artarsa ne olur?
 - Öncelikle Müsaade edilen artış miktarına bakarak mevcut gölge fiyatın geçerli olup olmadığını kontrol et.
 - Optimum çözümü kontrol et. Çünkü aynı köşe nokta fakat yeri değişmiştir.
- Elektronik parça tedarığı 4000 adet artarsa ne olur?
- Elektronik parçanın fiyatını tedarikçe 8 TL/adet olarak söylerse ne olur?
 - Mevcut fiyat 7 TL gölge fiyat ise 2 TL. Bu durumda hala 1 TL avantajımız vardır.
- 250 saat ilave montaj zamanının 15 TL/saat maliyetle sağlanabiliriz. Bu fırsatı kabul edermisiniz?
 - Gölge fiyat 24 TL/saat olduğu için kabul edilir.
- MP3 üretimini zorlamak nasıl bir etki yapar?
 - Azaltılmış maliyet -1 TL olduğu için her bir adet MP3 üretimi karı 1 TL azaltacaktır.
- Blu-Ray satış fiyatı hangi aralıkta olursa mevcut üretim hala karlı olur?
 - Satış fiyatı 10 TL artırılabilir, 5 TL azaltılabilir. Bu durumda mevcut çözüm hala optimumdur.

27

27

Örnek 7.3

- Diyet içecek üreten bir firma yağları yaktığını iddia ettiği biraz pahalı bir içeceği üretmeyi planlamaktadır. Bu içeceği için biri üç hafta içinde 25 kg kaybedecektir. İçecek 4 farklı madde içermektedir. Diyet planı bir kişinin günde en az 3 defa 12 oz tüketmesini fakat tüketimin 40 oz'dan az olmasını gerektirmektedir. Her madde farklı seviyelerde 3 kimyasal içermektedir. Sağlık kuralları bu kimyasallardan 2 tanesinin minimum sınırını, bir tanesinin ise maksimum sınırını belirlemiştir. Bu değerler tabloda verilmiştir.

	Madde A	Madde B	Madde C	Madde D	Kurallar
Kimyasal X	3	4	8	10	En az 280 oz En az 200 oz En çok 1050 oz
Kimyasal Y	5	3	6	6	
Kimyasal Z	10	25	20	40	
TL/oz	0.40	0.20	0.60	0.30	

28

28

	A	B	C	D		
Min	0,4	0,2	0,6	0,3		
Gün Min Doz	1	1	1	1	≥	36
Kimyasal X	3	4	8	10	≥	280
Kimyasal Y	5	3	6	6	≥	200
Kimyasal Z	10	25	20	40	≤	1050
Gün Max Doz	1	1	1	1	≤	40

Objective Cell (Min)			
Cell Name	Original Value	Final Value	
\$H\$5	0	13,0625	
Variable Cells			
Cell Name	Original Value	Final Value	Integer
\$B\$5 A	0	10,25	ContIn
\$C\$5 B	0	0	ContIn
\$D\$5 C	0	4,125	ContIn
\$E\$5 D	0	21,625	ContIn

29

29

Microsoft Excel 15.0 Duyarlılık Raporu						
Çalışma Sayfası: [yapay_teknik_cöz_xls]Sayfa142						
Rapor Oluşturuldu: 12.11.2013 21:16:51						
Değişken Hücreleri						
Hücre	Ad	Son Değer	Azaltılmış Maliyet	Hedef Katsayısı	İzin Verilen Artış	İzin Verilen Azalış
\$D\$7 X1-A		10,25	0	0,4	0,06	0,25
\$E\$7 X2-B		0	0,068	0,2	1E+30	0,069
\$F\$7 X3-C		4,125	0	0,6	1,5	0,073
\$G\$7 X4-D		21,625	0	0,3	0,085	1E+30
Kısıtlamalar						
Hücre	Ad	Son Değer	Gölge Ücret	Kısıtlama Sağ Taraf	İzin Verilen Artış	İzin Verilen Azalış
\$J\$11-Z Kimyasal	<= çözüm	1050	-0,024	1050	47,14	346
\$J\$12-Gün DozMax	<= çözüm	36	0	40	1E+30	4
\$J\$8-Gün Doz Min	>= çözüm	36	0,375	36	4	1,28
\$J\$9 X Kimya	>= çözüm	280	0,088	280	41	11
\$J\$10-Y Kimyasal	>= çözüm	205,75	0	200	5,75	1E+30

30

30

Hassaslık Analizi Soruları

1. B maddesi kullanımını 1 oz olursa maliyet nasıl etkilenir?
 1. Azaltılmış maliyet kadar artar. B maddesi azaltılmış maliyeti 0,069 TL olduğu için, yeni maliyet $13,06+0,069 = 13,13$ TL olur.
2. Elde edilen çözüm C maddesinin maliyetine ne kadar duyarlı?
 1. C'nin mevcut maliyeti 0,60 TL/oz. Bunda müsaade edilen limitler ise 1,5 Tl artış ve =,073 TL azalıştır. Bu nedenle C'nin maliyeti 0,527 TL ile 2,10 TL aralığında oldukça optimum karışım değişmez.
 2. Ancak toplam maliyet değişir.
3. X ve Z kimyasalının gölge fiyatı neyi ifade etmektedir?
 1. X kimyasalının içerikteki miktarı arttıkça maliyette her bir birim için 0,088 TL artacaktır. Ancak en fazla 41 birim artırılabilir. Bunun işareti \geq olduğu için artış çözüm bölgesini küçültecektir.
 2. Z kimyasalının işareti \leq olduğu için bundaki artış çözüm bölgesini büyütecektir. Bundaki artış toplam maliyeti azaltacaktır. Gölge fiyat -0,024 TL olduğu için.

31