Endüstri Mühendisliği Bölümü

2019-2020 BAHAR

Yöneylem Araştırması II

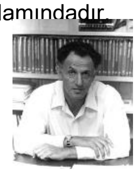
DİNAMİK PROGRAMLAMA

- Birbirine bağlı kararların seçilmesinde kullanılan *MATEMATİKSEL* bir yöntemdir.
- *Dinamik Programlama, çizelgeleme, paketleme, en kısa yol, stok yönetimi gibi değişik optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılır,*
- Temel olarak problemi alt problemlere ayırır ve her problemin çözümünü birleştirerek asıl probleme çözüm bulur.

DİNAMİK PROGRAMLAMA

- *1940'larda birbirini takip eden en iyi kararları bulma problemlerinin çözümünü tanımlamak için Amerikalı Matematikçi* ***Richard Bellman*** *tarafından kullanılmıştır.*
- *Bu yaklaşımını 1953 yılında güncelleyerek optimizasyon problemlerini çözmek üzere Dinamik Programlamayı geliştirmiştir.*
- Buradaki **Programlama, planlama** anlamındadır.

Richard E. Bellman(1920-1984)



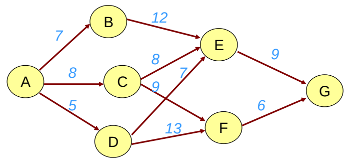
DİNAMİK PROGRAMLAMA(DP)

- *Problemleri çözmek için genel bir yaklaşımdır,*
- Gerekli matematiksel bağıntılar her problem için ayrı ayrı geliştirilmelidir,
- *Bu nedenle, hangi problemin DP'ye uygun olduğu ve DP'nin genel yapısını tespit etmek için özel yetenek gerekir,*
- Bu yetenek değişik DP problemleri üzerinde çalışılarak kazanılır

DP'nin Genel Yapısı

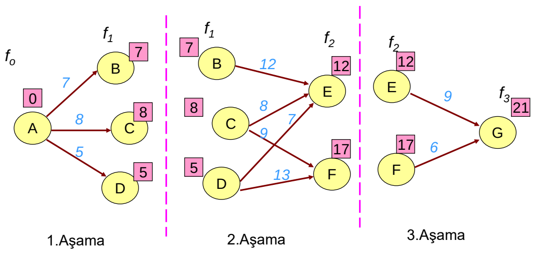
- DP, *n değişkenli* bir problemin optimum çözümünü *n aşamaya* ayrıştırarak bulur,
  - her aşamada tek değişkenli bir alt problemi çözerek bulur.
- DP'de hesaplamalar tekrarlanarak yapılır.
  - Bu nedenle bir alt problemin çözümü bir sonraki alt problemin girdisidir,
- Son alt problem çözüldüğünde, problemin tamamının optimum çözümü bulunmuş olur.

PROTOTİP (Örnek 10.2.1)



- A ve G şehirleri arasındaki en kısa yolu bulmak istediğimizi varsayalım. Şekilde tüm olası yollar görülmektedir.
- Bu problemi çözmek için tüm yolları (burada 5 yol var) ayrıntılı olarak hesaplayarak en kısa yolu bulabiliriz.
- Ancak bu yaklaşım daha büyük problemlerde etkili bir yöntem değildir.

- Problemi DP olarak çözmek için aşamalara ayırmak gerekir
- Burada 3 aşama söz konusudur



1.Aşama sonuçları;
- B düğümüne olan en kısa uzaklık = 7 km *(A düğümünden)*
- C düğümüne olan en kısa uzaklık = 8 km *(A düğümünden)*
- D düğümüne olan en kısa uzaklık = 5 km *(A düğümünden)*

2.Aşama sonuçları;
- Burada 1.aşama sonucu da hesaba katılır
- E düğümüne en kısa uzaklık
  = min *{i düğümüne en kısa mesafe + i düğümünden E düğümüne olan mesafe}; i=B,C,D*

  ={B->E; C->E; D->E}
  ={7+12=19;8+8=16; 5+7=12} = 12 km (D düğümünden)
- F düğümüne olan en kısa mesafe için benzer yaklaşım yapılır
  ={*8+9=17*; 5+13=18} = 17 km (C düğümünden)

3.Aşama sonuçları;

Bu aşamada E ve F düğümünden G düğümüne olan mesafe hesaplanır,

G düğümüne en yakın mesafe =

= *min { E->G; F->G}*

= *min {12+9 =21; 17+6=23}*

= 21, C düğümüden, (Genel sonuç)

DP'nin Genel Karakteristiği

Örnek problem DP'nin tüm özelliklerini taşıyan bir *prototip* problemdir.

- Bu özellikler;
  1. Problem aşamalara *(Stage)* bölünür, ve her aşama bir karar verilir *(policy decision),*
  2. Her aşamada değişik durumlar *(state)* söz konusudur,
  3. Her aşamada verilen kararın etkisi ise o anki durumu bir sonraki duruma taşımaktır. Bu problemi şebeke analizine benzetir. Burada düğümler durumu, düğüm sütunları ise aşamaları tanımlar,
  4. Çözüm metodu bir optimum kararlar sırası bulmak için geliştirilir,
  5. Herhangi bir durumda, bir sonraki aşamalar için verilecek kararlar bir önceki kademede verilen kararlardan bağımsızdır (optimumluk prensibi).
  6. Çözüm metodu, optimum kararın son aşama için verilmesi ile başlar(geriye doğru yineleme yaklaşımı)
  7. (n+1) aşaması için bir optimum karar var ise o karar n aşamasını da tanımlar. Bu ilişki;

$$f_n^*(s) = \min_{x_n} \{ c_{sx_n} + f_{n+1}^*(x_n) \}$$

Denklemi tekrarlama denklemi olarak tanımlanır

- Optimum karar için *"s"* durumunda *"n"* aşamasında, x_n değerinin optimumunun bulunması gerekir. Bunun için;
  - *N… toplam aşama sayısı*
  - *n….o andaki aşama (n=1,2,3,….N)*
  - *s_n….n aşamasındaki durum,*
  - *x_n….n aşamasındaki karar değişkeni*
  - *x^*_n….optimum x_n değeri*
  - *$f_n(s_n,x_n)$…aşamaların amaç fonksiyonuna katkısı*

$$f_n^*(s_n) = f_n(s_n, x_n^*)$$

- Yukarıdaki optimum karar her zaman aşağıdaki gibi ifade edilir

$$f_n^*(s_n) = \max_{s_n} \{f_n(s_n, x_n)\}$$

veya

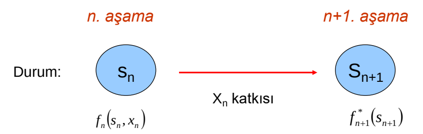
$$f_n^*(s_n) = \min_{s_n} \{f_n(s_n, x_n)\}$$

- Bu bağıntılar kullanılarak sondan başa doğru bir optimum kararlar dizisi bulunur

DETERMİNİSTİK DP

- Deterministik problemlerde bir sonraki aşamadaki durum, tamamen şimdiki aşamanın durumu ve kararları ile bulunur,

Şematik olarak aşağıdaki gibidir;



Örnek 10.3.1

Örnek 10.2.1 problemini geriye doğru çözelim.
Bunun tekrarlama denklemi aşağıdaki gibidir

$$f_i(x_i) = \min_{\substack{tümuygun \\ (x_i, x_{i+1})\,yolları}} \{d(x_i, x_{i+1}) + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1,2,3$$

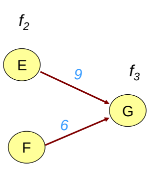
X_4=G için $f_4(x_4) = 0$ 'dır.

Burada 3.Aşamada;

x_4=G, *x_3=E ve F.* düğüm olup

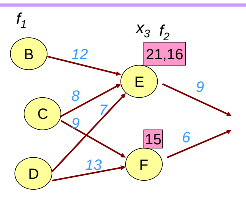
3.aşama aşağıdaki gibi özetlenir

Örnek 10.3.1 3.Aşama



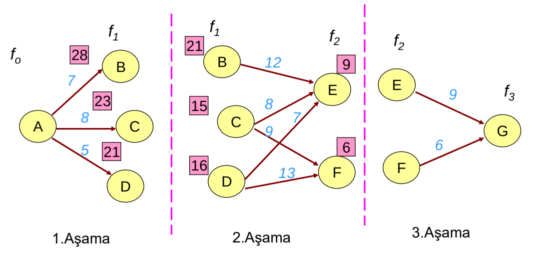
	$d(x_3,x_4)$	Optimum Çözüm	
x_3	x_4 =G	$f_3(x_3)$	x_4^*
E	9	9	G
F	6	6	G

2.Aşama Çözüm aşağıda özetlenmiştir



	$d(x_2,x_3)+f_3\,(x_3)$		Optimum Çözüm	
x_2	x_3 =E	x_3 =F	$f_2\,(x_2)$	x_3*
B	12+9=21	-	21	E
C	8+9=17	9+6=15	15	F
D	7+9=16	13+6=19	16	E

1.Aşama



Çözüm aşağıda

1.Aşama: Çözüm aşağıda özetlenmiştir

	$d(x_1,x_2)+f_2\,(x_2)$			Optimum Çözüm	
x_1	x_2 =B	x_2 =C	x_2 =D	$f_1\,(x_1)$	x_2*
A	7+21=28	8+15=23	5+16=21	21	D

- A şehrinden D şehrine en kısa bağlantıdır.
- Optimum bağlantı ise:

A ⇒ D ⇒ E ⇒ F

Dinamik Programlamanın Genel Yapısı

Dinamik Programlamanın üç temel bileşeni:

1. ***Aşamaların*** tanımlanması,
2. Her bir aşamada ***alternatiflerin*** tanımlanması,
3. Her bir aşama için ***durumların*** tanımlanması

Bunlardan ***Durumu*** tanımlamak en zor ve karmaşık olanıdır.

- Bunun için sorulması gereken sorular vardır;
  1. Aşamaları birbirine bağlayan ilişki nedir?
  2. Önceki aşamada verilen kararları gözden geçirmeden, içinde bulunulan aşamada uygun karar verilmesi için gereken bilgi nedir?

Optimumluk prensibi;

- Geriye kalan durumlar için verilecek optimum karar önceki durum veya kararlara bağlı değildir.
- Bu prensip problemin aşama aşama geriye doğru çözümüne yarar

21

Aşamalar (Stages)

- Problem daha küçük alt problemlere bölünür. Bu problemler ***aşama*** olarak tanımlanır.
- Problemin içeriğine bağlı olarak aşamalar değişik şekillerde tanımlanır.
- Eğer problem uzun-vadeli sistem hakkındaysa *aşamalar* zaman dilimlerini tanımlar.
- Eğer problem bir nesneyi bir yerden başka bir yere hareket ettirmeyse bu yerler aşamalardır.

Durum (state)

- Her aşamada değişik durumlar söz konusudur.
- Her aşamada verilen karar sonraki aşamadaki farklı bir duruma sebep olur.

23

Karar - Optimum politika

- Herhangi bir aşamadaki karar mevcut aşamadaki durumu sonraki aşamadaki duruma taşır.
- Çözüm işlemlerinin hedefi tüm problem için bir politika belirlemektir.
- Bu politika ***optimum kararlar dizisidir***.

24

Dinamik Programlama Uygulamaları

- Dört faklı problem türünün çözümü için Dinamik programlama yaklaşımı kullanılacaktır.
- Bunlar;
  - Sırt çantası / Kargo Yükleme Problemi,
  - İşgücü Sayısı belirleme problemi,
  - Ekipman Yenileme, problemi
  - Yatırım Modeli problemi

Sırt Çantası/ Kargo Yükleme Problemi

- Sırt çantası probleminde hacmi sınırlı bir çantaya maksimum ürün yerleştirmektir.
- Kargo yükleme ise sınırlı hacim veya ağırlık kapasitesine sahip bir gemiye kargoların yüklenmesiyle ilgilidir.
  - Her yükün bir gelir düzeyi olduğu için, amaç gemi kapasitesini en çok geliri getirecek şekilde kullanmaktır.

Burada;

- Ürün veya yükler ***aşamaları*** ifade eder,
  - i=1,2,3….n
- Aşama i'deki ***alternatifler*** yük miktarı olup m_i ile tanımlanırlar. Fayda ise $r_i m_i$'dir.
- Aşama i'deki ***durum*** ise X_i ile tanımlanır.

Sırt Çantası/ Kargo Yükleme Problemi

Bu modelde;

$f_i(x_i)$…verilen x_i durumu ve i, i+1,….n aşamaları için maksimum gelirdir.

Bu problem için geriye doğru bağıntılar **iki adımda** belirlenir

1.Adım: $f_i(x_i)$, $f_i(x_{i+1})$*'nin* fonksiyonu olarak tanımlanır

$$f_i(x_i) = \underset{\substack{m_i=0,1,..w/wi \\ x_i=0,1,..w}}{maks} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}$$

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$$

Sırt Çantası/ Kargo Yükleme Problemi

2. Adım:

X_{i+1}'i X_i'nin fonksiyonu olarak tanımla.

$X_i - X_{i+1} = w_i m_i$ bağıntısı i. aşamada kullanılan yükü gösterir.

Bu durumda $x_{i+1} = x_i - w_i m_i$ şeklinde ifade edilir. ve aşağıdaki bağıntı geri hesaplama bağıntısıdır

$$f_i(x_i) = \underset{\substack{m_i=0,1,..w/wi \\ x_i=0,1,..w}}{maks} \{r_i m_i + f_{i+1}(x_i - w_i m_i)\}, i = 1,2,..n$$

Örnek 10.3-1 *Sayfa: 407*

4 tonluk bir gemi üç farklı yük taşıyabilmekte ve özellikleri aşağıdaki gibidir.

i.yük	w_i	r_i
1	2	31
2	3	47
3	1	14

Burada ***W=4*** tondur. Yani maksimum taşınacak yük miktarı 4 tondur. Geliri maksimum yapmak için hangi yükler gemiye konmalıdır.

Önce problem aşamalara bölünmelidir?
Kaç aşamalı bir problem?

Örnek 10.3-1 *Sayfa: 407*

3. Aşama: Bu aşamada 3.yükten gemiye ne kadar konacağı aranır

Gemiye tahsis edilecek yük 0,1,2,3, veya 4 olabilir.

$X_3=0$, 3. yükü gemiye hiç koymamak demek
$X_3=4$, 3.yük ile gemi kapasitesinin tamamını doldurmak demek

$\boldsymbol{W_3=1}$ ton olduğu için, 3.yükün maksimum miktarı 4/1 = 4 olacaktır

3.Aşamadaki alternatifleri karşılaştırmada kullanılacak denklemler ise

$f_3(x_3) = maks\{14m_3\}$ ve $maks_{m3} = [4/1]=4$

- 3.aşama

$$f_x(x_3) = \underset{m_3}{maks}\{14m_3\}, maks_{m_3} = [4/1] = 4$$

x_3	$m_3=0$	$m_3=1$	$m_3=2$	$m_3=3$	$m_3=4$	$f_3(x_3)$	m_3^*
0	0	-	-	-	-	0	0
1	0	14	-	-	-	14	1
2	0	14	28	-	-	28	2
3	0	14	28	42	-	42	3
4	0	14	28	42	56	56	4

2.Aşama

Bu aşamada 2.yükün maksimum miktarı 4/3 = 1 adettir
X_2 ise geminin yük durumudur.

$f_2(x_2) = maks\{47m_2 + f_3(x_2-3m_2)\}$ ve $maks_{m2} = [4/3]=1$

x_2	$m_2=0$	$m_2=1$	$f_2(x_2)$	m_2^*
0	0+0=0	-	0	0
1	0+14=14	-	14	0
2	0+28=28	-	28	0
3	0+42=42	47+0=47	47	1
4	0+56=56	47+14=61	61	1

- 1.aşama

$f_1(x_1) = maks\{31m_1 + f_2(x_1 - 2m_1)\}$ ve $maks_{m1} = [4/2]=2$

x_1	$m_1=0$	$m_1=1$	$m_1=2$	$f_1(x_1)$	m_1^*
0	0+0=0	-	-	0	0
1	0+14=14	-	-	14	0
2	0+28=28	31+0=31	-	31	1
3	0+47=47	31+14=45	-	47	0
4	0+61=61	31+28=59	62+0=62	62	2

Optimum çözüm, $m_1^*=2$ olarak bulunur.
Yani 1 nolu yükten 2 adet yüklenirse maksimum fayda sağlanır

İŞGÜCÜ MODELLEMESİ

- Bazı projelerde, işgücünün işe alma ve işten çıkarmalarla dengede tutulmasına çalışılır. Hem işe alma, hem de işten çıkarma ek maliyetlere yol açar. Proje boyunca işgücü nasıl dengelenmelidir?
- Bu tür problemlerdeki bazı simgeler;
  - *n……..Proje süresi…*
  - *b_i……..i haftasındaki gerekli minimum işgücü*
  - ***x_i……..i haftasındaki gerçek işgücü sayısı (karar değişkeni)***
- Bu tür problemlerde iki tür maliyet ortaya çıkar
  1. *$C_1(x_i-b_i)$……..fazla işçi bulundurma toplam maliyeti*
  2. *$C_2(x_i-x_{i-1})$……..işçi işe alma toplam maliyeti*

İŞGÜCÜ MODELLEMESİ

- Dinamik programlamanın elemanları aşağıdaki gibi olur
  - *1) i. aşama,i=1,2,…n olur*
  - *2) i.aşamadaki alternatifler x_i olur,*
  - *3) i.aşamadaki durum ise i-1 aşamasındaki (hafta) işçi sayısıdır (x_{i-1})*

- *Bu problemin tekrarlanan denklemi ise*

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x \geq b_i} \{c_1(x_i - b_i) + c_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}$$

ve

$$f_{n+1}(x_n) = 0$$

- *Olup hesaplamalar $x_n=b_n$ ile n.aşamada başlar*

Örnek Problem(Sayfa 416)

- Bir müteahhit gelecek 5 hafta boyunca gerekli işgücü miktarını sırayla 5,7,8,4 ve 6 işçi olarak tahmin etmektedir. Fazla işçi bulundurmak 300 TL/işçi ek maliyet, herhangi bir haftada işe yeni işçi almak ise 400TL/hafta sabit maliyet ve işçi başına 200 TL ilave maliyete sebep olmaktadır. Bu müteahhit toplam minimum maliyet için her hafta kaç işçi bulundurmalıdır?

- Önce c_1 ve c_2 maliyeti hesaplanmalıdır.
- Sonra son aşama 5.aşamada $b_5=6$ olarak hesaplara başlanmalıdır

Örnek Problem(Sayfa 416)

Bu problem için her dönem gerekli işgücü sayısı;

$b_1=5$, $b_2=7$, $b_3=8$, $b_4=4$, $b_5=6$

Maliyetler ise;

$C_1(x_i-b_i) = 3(x_i-b_i)$, $x_i>b_i$, $i=1,2,\ldots,5$

$C_2(x_i-x_{i-1}) = 4+2(x_i-x_{i-1})$, $x_i>x_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,5$

Bu problemde haftalar aşamayı göstermektedir.
Yani 5 aşamalı bir problemdir.
Buna göre çözüme başlanır…

37

5.aşama (5.Hafta) gerekli işgücü ($b_5=6$)

	$f_5(x_4) = C_1(x_i-b_i)+C_2(x_i-x_{i-1})$	Optimum Çözüm	
x_4	$x_5 = 6$	$f_5(x_4)$	x_5^*
4	3(0)+4+2(2) =8	8	6
5	3(0)+4+2(1) =6	6	6
6	3(0)+0+2(0) =0	0	6

4.aşama (4.Hafta) gerekli işgücü ($b_4=4$)

	$f_4(x_3) = C_1(x_i-b_i)+C_2(x_i-x_{i-1})+f_5(x_4)$			Optimum Çözüm	
x_3	$x_4 = 4$	$x_4 = 5$	$x_4 = 6$	$f_4(x_3)$	x_4^*
8	3(0)+0+8=8	3(1)+0+6=9	3(2)+0+0=6	6	6

3.aşama (3.Hafta) gerekli işgücü ($b_3=8$)

	$f_3(x_2) = C_1(x_i-b_i)+C_2(x_i-x_{i-1})+f_4(x_3)$	Optimum Çözüm	
x_2	$x_3 = 8$	$f_3(x_2)$	x_3^*
7	3(0)+4+2(1) +6= 12	12	8
8	3(0)+0+2(0) +6 = 6	6	8

2.aşama (2.Hafta) gerekli işgücü (b_2=7)

	$f_2(x_1) = C_1(x_i - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_3(x_2)$		Optimum Çözüm	
x_1	$x_2 = 7$	$x_2 = 8$	$f_2(x_1)$	x_2^*
5	3(0)+4+2(2)+12= 20	3(1)+4+2(3)+6=19	19	8
6	3(0)+4+2(1)+12= 18	3(1)+4+2(2)+6=17	17	8
7	3(0)+0+12= 12	3(1)+4+2(1)+6=15	12	7
8	3(0)+0+12= 12	3(1)+0+6=9	9	8

1.Aşama (1.Hafta) gerekli işgücü (b_1=5)

	$f_1(x_0) = C_1(x_i - b_i) + C_2(x_1 - x_0) + f_2(x_1)$				Optimum Çözüm	
x_0	$x_1 = 5$	$x_1 = 6$	$x_1 = 7$	$x_1 = 8$	$f_1(x_0)$	x_1^*
0	3(0)+4+2(5)+ 19=33	3(1)+4+2(6)+ 17=36	3(2)+4+2(7)+1 2=36	3(3)+4+2(8)+9=38	33	5

Optimum çözüm:

$$X_0=0 \dashrightarrow x_1^*=5 \dashrightarrow x_2^*=8 \dashrightarrow x_3^*=8 \dashrightarrow x_4^*=6 \dashrightarrow x_5^*=6$$

- Çözüm Planı

Hafta	Min İşgücü (b_i)	Gerçek işgücü (x_i)	karar
1	5	5	5 kişi işe al
2	7	8	3 kişi işe al
3	8	8	Değişiklik yok
4	4	6	2 işçi çıkar
5	6	6	Değişiklik yok

TECHİZAT YENİLEME MODELİ

- Bir ekipmanın hizmet süresi artıkça bakım maliyeti artar, verimi düşer
- *Bu durumda belirli bir zaman sonra ekipmanı yenilemek daha ekonomik olur*
- *Her yıl ekipman değiştirilmeli mi yoksa kullanılmalı mı sorusunun cevabı aranır.*
- *Bu tür problemin parametreleri ise;*
  - *r(t)…..t yılında ekipmandan elde edilen fayda*
  - *c(t)… t yılında ekipmanın işletme maliyeti*
  - *s(t) …. T yaşındaki ekipmanın 2.el (hurda) değeri*
  - *I…….yeni ekipmanın satın alma maliyeti*

- Bu problem için DP modelinin üç bileşeni şu şekilde olur,
  1. *i.aşama; i yılı gösterir, i=1,2,…n*
  2. *i. Aşamadaki alternatifler(kararlar))*
     Yenile(Y) ve
     Kullan(K) olabilir
  3. *i.aşamadaki durum denklemi ise;*
     $f_i(t)$=i.yılın başında t yaşındaki ekipmanın net geliri olup denklemi aşağıdaki gibidir

$$f_i(t) = maks\begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+1}(t+1); kullan \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1); Yenile \end{cases}$$

ve

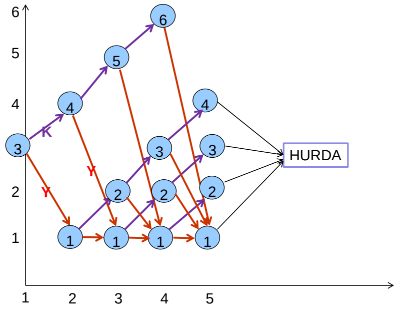
$$f_{n+1}() = 0$$

Örnek Problem

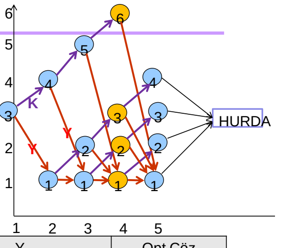
Bir firma şu anda 3 yaşında olan bir ekipmanı ilerideki 4 yıl içinde yenileyecek bir politika geliştirmek istemektedir. Firma 6 yaşındaki bir ekipmanı mutlaka yenilemelidir ve I=100000 TL'dir. Ekonomik parametreleri aşağıda verilen bir ekipman için yenileme politikası geliştirin

Yaş	Gelir(TLx100)	İşletme(TLx1000)	2.El (TLx1000)
0	20	0.2	-
1	19	0.6	80
2	18.5	1.2	60
3	17.2	1.5	50
4	15.5	1.7	30
5	14	1.8	10
6	12.2	2.2	5

- Yenileme probleminin aşamalarını belirleyelim

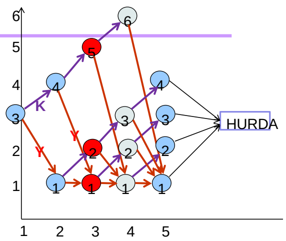


4.aşamada durum



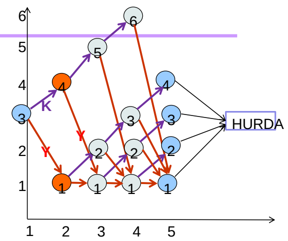
t	K	Y	Opt Çöz	
	r(t)+s(t+1)-c(t)	*r(0)+s(t)+s(1)-c(0)-I*	f_4 (t)	Karar
1	*19+60-0,6 = 78,4*	20+80+80-0,2-100 = 79,8	79,8	Y
2	*18,5+50-1,2= 67,3*	20+60+80-0,2-100 = 59,8	67,3	K
3	*17,2+30-1,5=45,7*	20+50+80-0,2-100 = 49,8	49,8	Y
6	*Mutlaka yenile*	20+5+80-0,2-100 = 4,8	4,8	K

3.aşamada durum

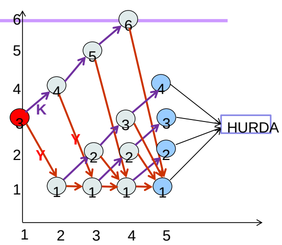


t	K	Y	Opt Çöz	
	$r(t)-c(t)+f_4(t+1)$	$r(0)+s(t)-c(0)-I+f_4(1)$	$f_3(t)$	Karar
1	*19-0,6 +67,3= 85,7*	20+80-0,2-100 +79,8= 79,6	85,7	K
2	*18,5-1,2+49,8= 67,1*	20+60-0,2-100 +79,8= 59,6	67,1	K
5	*17,2-1,8+4,8=17*	20+10-0,2-100 +79,8= 9,6	17	K

2.aşamada durum



t	K	Y	Opt Çöz	
	$r(t)-c(t)+f_3(t+1)$	$r(0)+s(t)-c(0)-I+f_3(1)$	$f_2(t)$	Karar
1	*19-0,6 +67,1= 85,5*	20+80-0,2-100 +85,7= 85,5	85,5	Y,K
4	*15,5-1,7+17= 30,8*	20+30-0,2-100 +85,7= 35,5	35,5	Y



1.aşamada durum

t	K	Y	Opt Çöz	
	$r(t)-c(t)+f_2(t+1)$	$r(0)+s(t)-c(0)-I+f_2(1)$	$f_1(t)$	Karar
3	*17,2-1,5 +35,5= 51,2*	20+50-0,2-100 +85,5= 55,3	55,3	Y

- Optimum Çözüm
  - *1.Çözüm: Y K K Y SAT*
  - *2.Çözüm : Y Y K K SAT*

YATIRIM MODELİ

Bu tür problemler kapsamında en uygun yatırım politikası belirlenmeye çalışılır.

- Önümüzdeki n yılı boyunca her yılın başında P_i kadar yatırım yapmak istiyorsunuz. Seçenekler, iki farklı bankaya yatırım yapmaktır.
- Her bankanın vereceği faiz farklı olup aşağıdaki gibi tanımlanır;
  - *Birinci banka faiz oranı i_1;*
  - *İkinci banka faiz oranı i_2,*

YATIRIM MODELİ

Ayrıca, her iki bankada yatırım miktarına bağlı olarak ek faiz vermekte ve bu faiz yıldan yıla değişmektedir.

- *i yılında birinci banka ek faizi q_{i1},*
- *i yılında ikinci banka ek faizi q_{i2}*

Bu kapsamda elde edilen faiz i dönemi dönemi sonunda P_{i+1} miktarına eklenerek yeni yatırım olarak bankaya yatırılır.

Herhangi bir dönemde bankaya yatırılan para n yılı boyunca bankada kalıyor.

YATIRIM MODELİ

Bu problem için DP modelinin üç bileşeni şu şekilde olur;

1. *i.aşama; i yılı gösterir, $i=1,2,\ldots n$*
2. *i. aşamadaki alternatifler $I1_i$ ve $I2_i$ olarak birinci ve ikinci bankaya yatırılan miktar*
3. *i.aşamadaki x_i durumu, i.yılın başında yatırım için ayrılan para miktarıdır.*

Yani $x_i = I1_i + I2_i$; veya $I2_i = X_i - I1_i$

Buradan;

$$X_1 = P_1$$

$$X_i = P_i + ((q_{i-1,1})x(I1_{i-1})) + ((q_{i-1,2})x(I2_{i-1}))$$

$$= P_i + (q_{i-1,1}I1_{i-1}) + q_{i-1,2}(x_{i-1} - I1_{i-1})$$

$$X_i = P_i + (q_{i-1,1} - q_{i-1,2})I1_{i-1} + q_{i-1,2}x_{i-1})$$

- Buna göre;

Yeniden bankaya yatırılacak para X_i, sadece yeni para ve i-1. yılda yapılan yatırımların ek faizlerinin toplamıdır.

***$f_i(x_i)$….**i yılı başında i,i+1,..n yılları için yatırımların optimum değeridir;*

***S_i** ise i yılı sonunda bankada biriken paranın toplamıdır.*

Amaç ise,

$$\text{Maks } Z = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots\ldots + S_n$$

Burada;

$$S_i = I1_i(1+i_1)^{n+1-i} + (x_i - I1_i)(1+i_2)^{n+1-i}$$

$$S_n = I1_n(1+i_1+q_{n1}-(1+i_2)-q_{n2})+(x_n)(1+i_2+q_{n2}) \quad \text{n.yıldaki ek faizler dahil}$$

- Buradan hareketle geriye doğru DP denklemi aşağıdaki gibidir

$$f_i(x_i) = \underset{0 \le I_i \le x_i}{maks}\{s_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1,2,\ldots n$$

ve

$$f_{n+1}(x_{n+1}) \equiv 0$$

Örnek Problem

- Bugün 4000 TL'lik, 2,3,ve 4.yılların başında da 2000TL'lik yatırım yapmak istiyoruz. Birinci banka %8 bileşik ve önümüzdeki yıllar içinde ek faiz oranı olarak 1.8,1.7,2.1 ve 2.5 önermektedir. İkinci bankanın faiz oranı ise %0.2 daha düşük, ek faiz oranları ise %0.5 daha büyüktür. 4.Yılın sonunda maksimum birikim için nasıl bir tercih yapılmalı?

Bu durumda;

i_1=%8 ve $q_{11}=0.018$, $q_{12}=0.017$, $q_{13}=0.021$, $q_{14}=0.025$

i_2=%7.8 ve $q_{21}=0.023$, $q_{22}=0.022$, $q_{23}=0.026$, $q_{24}=0.03$

Örnek Problem

Buna göre

$f_4(X_4) = maks\ \{s_4\}$

- $S_n = I1_n(1+i_1+q_{n1}-(1+i_2)-q_{n2})+(x_n)\ (1+i_2+q_{n2})$

4.Aşama

$S_4=(1+0.08-(1+0.078)-0.03)I1_4+(1+0.078+0.03)X_4$

$=-0.003I1_4+1.1078X_4$

Burada birinci kısım (-) olduğu için maksimum S_4 için $I1_4=0$ olmalıdır

Durum	$f_4(x_4)$	$I1_4^*$
X_4	$1,108X_4$	0

Örnek Problem

3.Aşama

$S_3=(1.08^2-(1+0.078)^2)I_{31}+(1+0.078)^2X_3$

$=0.00432_{31}+1,162X_3$

$x_4= 2000 -0.005I_{31} + 0,026X_3$

şeklindedir

$f_3(x_3) = maks\ \{0,0432I1_3+1,1621X_3+1,108(2000-0,005I1_3+0,026X_3)\}$

$= maks\ \{2216-0,00122I1_3 +1,1909X_3\}$

Durum	$f_3(x_3)$	$I1_3^*$
X_3	$2216+1,1909X_3$	0

Örnek Problem

2.Aşama

$S_2=(1.08^3-(1.078)^3)I1_2+(1.078)^3X_2$

$=0.00698I1_2+1{,}253X_2$

$x_3= 2000 -0.005I1_2 + 0{,}022X_2$

şeklindedir

$f_2(x_2)$ = maks $\{0{,}00698I1_2+1{,}253X_2+1{,}1909(2000-0{,}005I1_2+0{,}026X_2)\}$
= maks $\{4597{,}8+0{,}00103I1_2 +1{,}27893X_2\}$

Durum	$f_2(x_2)$	$I1_2^*$
X_2	$4597{,}8+1{,}2799X_2$	X_2

Örnek Problem

1.Aşama

$S_1=(1.08^4-(1.078)^4)I1_1+(1.078)^4X_2$

$S1=0.01005I1_1+1{,}3504X_1$

$x_2= 2000 -0.005I1_1 + 0{,}023X_2$

şeklindedir

$f_1(x_1)$ = maks $\{0{,}01005I1_1+1{,}3504X_1+4595{,}8+1{,}12799(2000-0{,}005I1_1+0{,}023X_1)\}$
= maks $\{7157{,}7+0{,}00365I1_1 +1{,}3798X_1\}$

I21'ye para yatırmak fayda sağlamayacağından tüm para 1. bankaya yatırılır.
Bu duurmda $I1_1 = X_1$

Durum	$f_1(x_1)$	$I1_1^*$
X1=4000	$7157{,}7+13849X_1$	4000

Örnek Problem

1.Aşama

$x_2= 2000 -0.005I1_1 + 0{,}023X_2 = 2000 -0.005x4000 + 0{,}023x4000 =2072$

$x_3= 2000 -0.005x2072 + 0{,}023x2072 = 2035{,}22$

$x_4= 2000 -0.005x0 + 0{,}023x2035{,}22 = 2052{,}9$

Değerleri elde edilir

Buna göre

Optimum Çözüm	Karar	
$I1_1=X_1$ $I1_2=X_2$ $I1_3=0$ $I1_4=0$	*X1 = 4000 TL'yi 1.bankaya yatır* *X2 = 2072 TL'yi 1.bankaya yatır* *X3 = 2035 TL'yi 2.bankaya yatır* *X3 = 2052,9 TL'yi 2.bankaya yatır*	

ÖDEV PROBLEMLER (3)

Kitabınızın aşağıda verilen problemlerini çözünüz.

1. *Sayfa 406, Problem 2.*
2. *Sayfa 413, Problem 5.*
3. *Sayfa 414, Problem 8*
4. *Sayfa 419, problem 4.*

Ödev Teslim Tarihi: ***26 Mart 2020***

Saati : ***13:00***

Teslim Edilecek Kişi : ***Arş. Gör. Hakan Öztürk***

Notlar:

1. *Ödev kapak sayfası olmalı,*
2. *Problemlerin optimum çözümüde olsun*

BOYUT PROBLEMİ

- Anlatılan modellerde herhangi bir aşamada durum *bir değişkenle* belirtilmektedir.
- Gerçekte ise herhangi bir aşamada *durum değişkenlerinin* sayısı birden fazla olabilir.
- Değişkenlerin sayısının artması hesaplamaların sayısını da artırır.
- Hesaplama sayısının artmasının yanı sıra hesaplama güçlüğünü oluşur. Bu durum DP *boyut laneti* olarak adlandırılır.

65