Endüstri Mühendisliği Bölümü

2019-2020 BAHAR

Yöneylem Araştırması II

1

Olasılıklı Stok Modelleri

- Talep olasılık dağılımıyla tanımlandığında olasılıklı stok modelleri oluşturulur,
- Bu modeller genel anlamda sürekli ve periyodik gözden geçirme durumuna göre sınıflandırılır

- Sürekli Gözden Geçirme Modelleri (SGGM)
  - Kısmi Olasılıklı ESM modeli
  - Tam Olasılıklı ESM modeli
- Periyodik Gözden Geçirme Modelleri (PGGM)
  - Tek Periyotlu Modeller
    - Hazırlık Maliyetsiz Model
    - Hazırlık Maliyetli Model
  - Çok periyotlu Modeller

2

(SGGM) Kısmi Olasılıklı ESM Modeli

Tedarik süresi boyunca stok boşalma olasılığıyla belirlenen emniyet stoğu büyüklüğü önceden belirlenen değeri aşmaz,

Bu Modelde Kullanılan Simgeler;

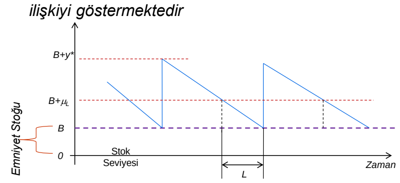
- *L…tedarik süresi*
- *X_L…tedarik süresince talebi gösteren değişken*
- *μ_L… tedarik süresince ortalama talep*
- *σ_L… tedarik süresince talebin standart sapması*
- *B..emniyet stoğu*
- *α … tedarik süresince stok boşalmasının izin verilen maksimum olasılığı (Normal dağılımda alan)*

- *Buradaki temel kabul, L tedarik süresince x_L ile gösterilen talep normal dağılım gösterir*

3

3

Aşağıdaki şekil kısmi olasılıklı ESM modelinin parametreleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir



B'yi belirlemek için kullanılan olasılık ifadesi

$$P\{x_L \geq B+\mu_L\} \leq \alpha$$

şeklinde yazılır.

4

4

$$z = \frac{x_L - \mu_L}{\sigma_L}$$ Olduğu için $$P\left\{ z \geq \frac{B}{\sigma_L} \right\} \leq \alpha$$ elde edilir.

Standart normal dağılım tablosundan $P\{z \geq K_\alpha\} = \alpha$

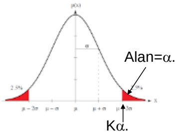
olacak şekilde K_α tanımlanır. Buradan emniyet stoğu büyüklüğü

$$B \geq \sigma_L K_\alpha$$ eşitsizliğini mutlaka sağlamalıdır.

L süresince talep $N(\mu_L, \sigma_L)$ olup, burada;

Ortalama talep,. $\mu_L = DL$

Talebin standart sapması $\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L}$



Örnek 16.2-1, sayfa 577

Ampül tüketimi (D) = 100 adet/gün
Sipariş Maliyeti(K) = 100 TL/Sipariş
Elde bulundurma Maliyeti (h) = 0.02 TL/adet_gün
Tedarik Süresi (L) = 12 gün

Verilere göre optimum sipariş miktarı ilgili bağıntıdan;

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2x100x100}{0.02}} = 1000 A\text{det } Ampül$$

olarak bulunmuştu.

Eğer günlük talep, ortalaması 100 ve standart sapması 10 ampul olan bir normal dağılıma (yani N(100,10)) uyuyorsa ve stok boşalma olasılığı α=0.05'in altındaysa emniyet stoğu ne olmalıdır?

Etkin tedarik süresi L_e=2 gün olduğuna göre;

$$\mu_L = DL = 100x2 = 200 a\text{det}$$

$$\sigma_L = \sqrt{\sigma^2 L} = \sqrt{10^2 x2} = 14.14$$

Standart normal dağılım tablosundan $K_{0.05}$=1.64 bulunur

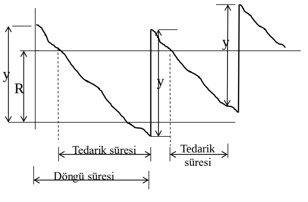
$$B \geq \sigma_L K_\alpha \Rightarrow B \geq 14.14x1.64 \approx 23$$

olarak hesaplanır.

ESM, y*=1000 olarak verildiğinde B'yi içeren optimum stok politikası stok düzeyi 223 birime düştüğünde 1000 birim sipariş ve haline gelir.

(SGGM) Tam Olasılıklı ESM Modeli

- Bu model Kısmi olasılıklı ESM modelinin aksine talebin elde bulundurulmamasına izin verir.
- Aşağıda görüldüğü gibi. Buna göre stok R seviyeye düştüğünde y miktarında sipariş ver



Bu modelin üç varsayımı vardır:

1. Tedarik süresince karşılanmayan talep bekletilir,
2. Birden fazla beklenen siparişe izin verilmez,
3. Tedarik süresince talep dağılımı değişmez

Buna göre birim zamandaki toplam maliyet fonksiyonunu yazmak için;

f(x)=tedarik süresince talebin pdf'si, x
D=birim zamanda beklenen talep,
h=Elde bulundurma maliyeti
p=bir birimi elde tutmamanın maliyeti
K=Hazırlık maliyeti

olsun.

Buna göre maliyet fonksiyonu bileşenleri;

1. *Hazırlık maliyeti*;

Bu maliyet ***KD/y*** ile hesaplanır

2. *Beklenen elde bulundurma maliyeti*; (ortalama stoğa göre) ortalama stok bağıntısında ortalama stok miktarı hesaplandıktan sonra

$$I = \frac{(y + E\{R - x\}) + E\{R - x\}}{2} = \frac{y}{2} + R - E\{x\}$$

hI formülü ile hesaplanır..

Yukarıdaki bağıntı stok döngüsünün başlangıç ve bitiş stoklarının ortalamasına dayanır

Y+E{R-x} *başlangıç stoğu*
E{R-x} *bitiş stoğu*

3. *Beklenen elde bulundurmama maliyeti*;

elde bulundurmama ***x>R*** olduğu zaman oluşur. Bu durumda döngüde elde bulundurmama miktarı ***S*** aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$s = \int_R^{\infty} (x - R)\, f(x)\,dx$$

Çevrimdeki elde bulundurmama maliyeti *pS*'dir.
Buradan birim zamandaki elde bulundurmama maliyetide *pDS/y*'dir.

Toplam Maliyet Fonksiyonu

- Birim zamandaki maliyet fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır

$$TBM\,(y, R) = \frac{DK}{y} + h\left(\frac{y}{2} + R - E\{x\}\right) + \frac{pD}{y}\int_R^{\infty} (x - R)\, f(x)\,dx$$

- Buradan optimum y* ve R* için çözümler için aşağıdaki bağıntılar kullanılır

$$\frac{\partial TBM}{\partial y} = -\left(\frac{DK}{y^2}\right) + \frac{h}{2} - \frac{pDS}{y^2} = 0 \Rightarrow y^* = \sqrt{\frac{2D(K + pS)}{h}} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial TBM}{\partial R} = h - \left(\frac{pD}{y}\right)\int_R^{\infty} f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_R^{\infty} f(x)\,dx = \frac{hy^*}{pD} \qquad (2)$$

(1) ve (2) denklemini çözmek için kullanılan algoritma 1963 yılında Hadley ve Whitin tarafından geliştirilmiş olup sonlu sayıdaki tekrarlamadır

Burada R=0 için, $\hat{y} = \sqrt{\dfrac{2D(K + pE\{x\})}{h}}$

$\tilde{y} = \dfrac{pD}{h}$

Olup $\hat{y} \leq \tilde{y}$ ise, y ve R'nin tek optimum değeri vardır.

Buna göre algoritmanın adımları;

0.Adım: $y_1 = y^* = (2KD/h)^{0.5}$ başlangıç çözümünü kullan ve $R_0=0$ olsun.i=1 olarak belirle ve i.adıma git.

i.Adım: (2) denkleminden R_i'yi belirlemek için y_i'yi kullan. $R_i = R_{i-1}$ ise dur.

Optimum çözüm $y^* = y_i$, ve $R^* = R_i$ olur.

Aksi durumda y_i'yi hesaplamak için (1) denkleminde R_i'yi bul. $i=i+1$ olarak belirle ve tekrar i.adıma git.

13

13

Örnek 16.2-2, sayfa 581

D=1000 kg/ay; K=100 TL/sipariş; h=2 TL/kg_ay;

f(x)=1/100, 0<x<100; E{x}=50 kg

Önce problemin uygun çözümü olup olmadığı kontrol edilir;

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2D(K + pE\{x\})}{h}} = \sqrt{\frac{2x1000(100 + 10x50)}{2}} = 774.6kg$$

$$\tilde{y} = \frac{pD}{h} = \frac{10x1000}{2} = 5000kg$$

$\hat{y} \leq \tilde{y}$ olduğu için y* ve R* için tek bir çözüm vardır.

$$S = \int_R^{100} (x - R)\frac{1}{100}dx = \frac{R^2}{200} - R + 50$$

$$y_i = \sqrt{\frac{2x1000(100 + 10S)}{2}} = \sqrt{100000 + 10000S}$$

$$\int_{R_i}^{100} \frac{1}{100}dx = \frac{2y_i}{10x1000} \Rightarrow R_1 = 100 - \frac{y_i}{50}$$

formülleri elde edilir

14

14

1.Tekrar: $S=0$

$$y_1 = \sqrt{\frac{2x1000(100 + 10x0)}{2}} = 316{,}23kg$$

$$R_1 = 100 - \frac{316{,}23}{50} = 93{,}68kg$$

2.Tekrar

$$S = \frac{R_1^2}{200} - R_1 + 50 = 0{,}1997kg$$

$$y_2 = \sqrt{1000(100 + 10x0{,}1997)} = 319{,}37kg$$

$$R_2 = 100 - \frac{319{,}37}{50} = 93{,}612kg$$

15

15

3.Tekrar

$$S = \frac{R_2^2}{200} - R_2 + 50 = 0{,}2040kg$$

$$y_3 = \sqrt{1000(100 + 10x0{,}2040)} = 319{,}44kg$$

$$R_3 = 100 - \frac{319{,}44}{50} = 93{,}611kg$$

R_2 ve R_3 hemen hemen birbirine eşit olduğu için yaklaşık optimum bulunmuştur.

Buna göre $R^*=93{,}61$ kg ve $y^*=319.4$ kg

16

16

Periyodik Gözden Geçirme Modelleri

Burada iki ana grup model vardır

- Tek Periyotlu Modeller
  - Hazırlık Maliyetsiz Model
  - Hazırlık Maliyetli Model (s-S politikası)
- Çok Periyotlu Modeller

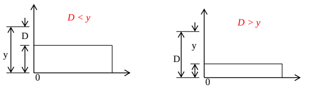
Bu modellerde kullanılan semboller ise;

c=birim satın alma maliyeti	*K=Sipariş maliyeti*
h=elde bulundurma maliyeti	*p=elde bulundurmama maliyeti*
D=olasılıklı talep	*f(D)= talebin olasılık fonksiyonu*
y=sipariş miktarı	*x=sipariş öncesi eldeki stok miktarı*

(PGGM) Hazırlık Maliyetsiz Model

- Bu modelin kabulleri şunlardır;
  - Talep sipariş verildikten hemen sonra ani olarak gerçekleşir
  - Hazırlık maliyeti oluşmaz

  Şekiller D ile gösterilen talep karşılama sonrası stok pozisyonudur



- Eğer D<y ise , y-D miktarı periyot boyunca korunur, aksi durumda D-y kadar talep karşılanmaz.

(PGGM) Hazırlık Maliyetsiz Model

Periyot için beklenen maliyet E{M(y)} aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$E\{M(y)\} = c(y-x) + h\int_0^y (y-D)\,f(D)dD + p\int_y^\infty (D-y)\,f(D)dD$$

Bunun y'ye göre 1.türevini alıp sıfıra eşitlersek aşağıdaki bağıntı elde edilir;

$$P\{D \le y^*\} = \frac{p-c}{p+h}$$

bu eşitliğin sağ tarafı kritik oran olarak tanımlanır.

y*'ın değeri sadece kritik oran negatif değilse tanımlanır.

Sayfa 585 Örnek 16.3.1.

Bir gazete bayi bir gazeteyi 0.3 TL'ye satın alıp, 0.75 TL'ye satmaktadır. Satılmayan gazeteler 0.05 TL'ye geri alınmaktadır. Aşağıdaki talep dağılımına göre bayi günde kaç gazete satın almalıdır?

A) Talep ortalaması 300 adet ve standart sapması 20 adet olan Normal dağılıma uymakta,
B) Kesikli pdf olup D-f(D) yandaki gibidir 100-0.1;220-0.2;300-0.4;320-0.2;340-0.1

Veri olmamasına karşın,

- satılmayan her gazete 0.3-0.5=0.25 TL olarak bulundurma maliyeti,
- bulundurmama maliyetide 0.75 TL olacaktır.

Buradan stok problemi parametreleri;

C=0.3 TL/gazete, h=0.25 TL/gazete, p=0.75 TL/gazete, olduğu varsayılır.

Buradan kritik oran;

(p-c)/(p+h) = (75-30)/75+25) = 0.45 olarak bulunur.

Sayfa 585 Örnek 16.3.1.

A Durumu: Talep D, N(300,20) ve N(0,1) standart normal değişkeni

Bu durumda kritik oran değerine göre normal dağılım tablosundan

z=-0.125 olarak bulunur.

z=(D-300)/20 olduğundan

(y*-300)/20=-0.125 bağıntısına göre

y*=297.5 veya 298 olarak bulunur.

B Durumu: Talep D, kesikli bir pdf'ye uyduğu için kümülatif yoğunluk fonksiyonu (CDF)'nu p{D<=y } olarak belirlenir:

D	200	220	300	320	340
p{D<=y }	0.1	0.3	0.7	0.9	1.0

Hesaplanmış kritik oran 0.45 için;

P{D<=220}<= 0.45<=P{D<=300} yazılır ve y*=300 gazete olarak belirlenir.

(PGGM) Hazırlık Maliyetli Model (s-S Politikası)

- Bu modelde K hazırlık maliyeti vardır. Dönem başına beklenen maliyet

$$E\{\overline{M}(y)\} = K + E\{M(y)\}$$

$$E\{\overline{M}(y)\} = K + c(y-x) + h\int_0^y (y-D)\,f(D)dD + p\int_y^\infty (D-y)\,f(D)dD$$

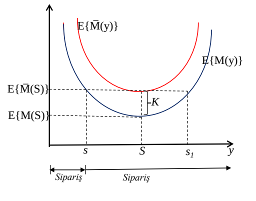
- Optimum değer y* aşağıdaki denklemi mutlaka sağlamalıdır;

$$P\{y \le y^*\} = \frac{p-c}{p+h}$$

- K sabit olduğu için $E\{\overline{M}(y)\}$ nin minimum değeri şekildeki gibi y* da gerçekleşmek zorundadır.

Aşağıdaki şekilde;

*S=y** ve s'nin (<S) değeri E{M(s)} = K + E{M(S)} ve s < S denklemindedir



- Sipariş vermeden önce elde bulunan stok miktarı x birim olarak verildiğinde ne kadar sipariş verilecektir? Bunun için üç koşul söz konusudur:
  1. $x < s$
  2. $s <= x <= S$
  3. $x > S$

1.Durum ($x < s$): x eldeki miktar olduğu için eşdeğer maliyet E{M(x)} ile verilir. Eğer herhangi bir y-x(y>x) ek sipariş verilirse, y'nin maliyeti hazırlık maliyetini içeren *E{M(y)}*'dir.

$$minE\{\overline{M}(y)\} = E\{\overline{M}(S)\} < E\{M(x)\}$$

Bu durumda optimum sipariş politikası *S-x birim* sipariş vermektir.

2.Durum ($s \le x \le S$): Şekilden

$$E\{M(x)\} \le minE\{\overline{M}(y)\} = E\{\overline{M}(S)\}$$

25

25

3.Durum ($x > S$): Şekilden y>x için

$$E\{M(x)\} < E\{\overline{M}(y)\}$$

Bu durumda sipariş vermemek daha ekonomiktir. Yani *y*= x'dir*.

Çoğunlukla s-S politikası diye anılan optimum stok politikası

x < s ise S-x kadar sipariş ver
x ≥ s ise sipariş verme

26

26

Sayfa 589 Örnek: 16.3.2

- Talebin pdf'si 0 ile 10 birim arasında düzgün dağılmakta,

h= 0,5 TL/dönem ; p= 4,5 tl/dönem ; c= 0,5 TL/adet K=25 TL/sipariş
Optimum stok politikası nedir?
Önce y* belirlenir

$$P\{D \le y^*\} = \frac{p-c}{p+h} = \frac{4,5-0,5}{4,5+0,5} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Buradan; $P\{D \le y^*\} = \int_0^{y^*} \frac{1}{10} dD = \frac{y^*}{10}$ denkleminden *S=y*=8*

Beklenen maliyet fonksiyonu ise;

27

27

- $E\{M(y)\} = c(y-x) + 0,5\int_0^{y} \frac{1}{10}(y-D)dD + 4,5\int_y^{10} \frac{1}{10}(D-y)dD$

$$= 0,5(y-x) + 0,05\left[yD - \frac{D^2}{2}\right] + 0,45\left[\frac{D^2}{2} - Dy\right]$$

$$= 0,25y^2 - 4y + 22,5 - 0,5x$$

olarak belirlenir

E{M(s)}= K+E{M(S)} denkleminin çözümüyle s değeri belirlenir
Buda;

$$0,25s^2 - 4s + 22,5 - 0,5x = 25 + 0,25S^2 - 4S + 22,5 - 0,5x$$

S= 8 yazılırsa *s^2-16s-36=0* denklemi elde edilir

28

28

s^2 *-16s-36= 0* Denklemi çözüldüğü zaman ise;

s=-2 ve s= 18 değerleri bulunur.

s=18 > S=8 ve s=-2 olduğu için s'nin uygun değeri yoktur.

Optimum çözüm hiçbir şekilde sipariş verme olur.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

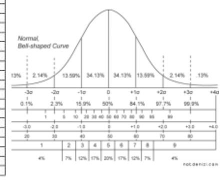
$$\Delta > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ve } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

29

29

Normal Dağılım Tablosu

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0,0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4691
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4384	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.2	.4297	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.7	.2420	.2389	.2368	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0056	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048

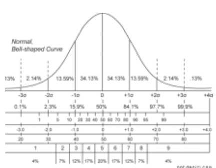


30

30

Normal Dağılım Tablosu

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0,0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4691
-0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4384	.4364	.4325	.4286	.4247
-0.2	.4297	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
-0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
-0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
-0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
-0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
-0.7	.2420	.2389	.2368	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
-0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
-0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
-1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
-1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
-1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
-1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
-1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
-1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
-1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
-1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
-1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
-1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
-2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
-2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
-2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
-2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
-2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
-2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0056	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048



31

31