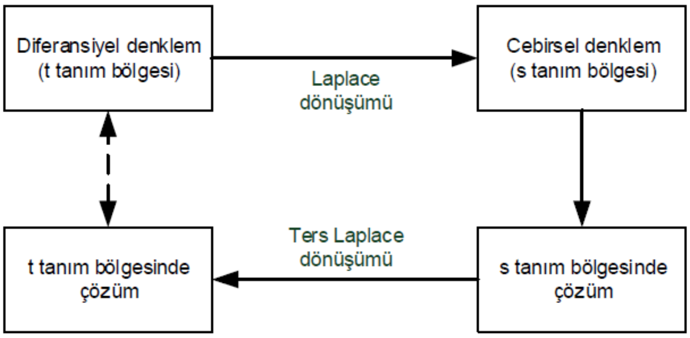
5. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Proses kontrolde sistemi tanımlayan birçok matematiksel modeller kullanılır.

•Bu modelleri çözerken sıklıkla diferansiyel denklem çözümleri yapılır.

•Laplace dönüşümleride **diferansiyel denklemlerin cebirsel denklemler haline getirilmesini** sağlar ve kontrol hesaplamalarında büyük kolaylıklar sağlamaktadır.



Basit doğrusal diferansiyel denklemlerin Laplace ile çözümü

LAPLACE DÖNÜŞÜM YÖNTEMİNİN AVANTAJLARI

- Sistemin diferansiyel denklemlerini gerçek anlamda çözmeden sistem başarısının kestirimiyle ilgili grafiksel tekniklerin kullanılmasına imkân sağlar.
- Diferansiyel denklem çözümünde çözümün hem geçici durum bileşenleri hem de kalıcı durum bileşenleri aynı anda elde edilebilir.

TANIM

Zamana bağlı olarak değişen bir f(t) fonksiyonunun Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$$

$\mathcal{L} = Laplas\ dönüşüm\ operatörü$

$s = Laplas\ dönüşüm\ değişkeni$

Burada $s > 0$ olup $s = \sigma + j\omega$ şeklinde kompleks (karmaşık) bir sayıdır.

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN TEMEL ÖZELLİKLERİ

1. Laplace dönüşümü t ve s domenleri arasında yapılan doğrusal bir dönüşümdür.

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s) \\ \mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}\{a_1 f_1(t) \mp a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(s) \mp a_2 F_2(s)$$

2. Ters Laplace dönüşümü t ve s domenleri arasında yapılan doğrusal bir dönüşümdür.

$$\left.\begin{matrix}\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} = f_1(t) \\ \mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = f_2(t)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\{a_1 F_1(s) \mp a_2 F_2(s)\} = a_1 f_1(t) \mp a_2 f_2(t)$$

3. Türevin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = s\, F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2} f(t)\right\} = s^2\, F(s) - s\, f(0) - f^{\prime}(0)$$

n. dereceden türevin Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n\, F(s) - s^{n-1}\, f(0) - s^{n-2}\, f^{\prime}(0) - \cdots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

$f(0), f^{\prime}(0), \ldots f^{n-1}(0)$; *sırasıyla* $f(t)$ *fonksiyonu ve türevlerinin başlangıç değerleridir.*

Başlangıç koşulları sıfır olduğunda;

$$\mathcal{L}\{f^n(t)\} = s^n\, F(s)$$

4. Integralin Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\lambda)\,d\lambda\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$$\mathcal{L}\left\{\iint_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s^2}$$

5. Başlangıç değer teoremi; Laplace dönüşümü F(s) olan bir f(t) fonksiyonunun t>0 için başlangıç değeri;

$$f(0) = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

6. Son değer teoremi; Laplace dönüşümü F(s) olan bir f(t) fonksiyonunun son değeri,

$$f(\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)$$

BAZI ÖNEMLİ FONKSİYONLARIN LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİ

Otomatik kontrol sistemlerini test etmek amacıyla bazı giriş fonksiyonları kullanılır. Bunlar;

• Basamak fonksiyonu,

• Darbe (puls) fonksiyonu,

• Ani darbe (impulse) fonksiyonu,

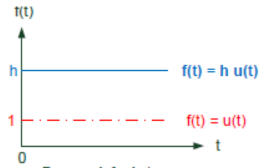
• Rampa (ramp) fonksiyonu,

Basamak Fonksiyon

$f(t) = h\,u(t)$ şeklinde zamanın fonksiyonu olarak verilen ve

$$t < 0 \text{ için } f(t) = 0$$

$$t \geq 0 \text{ için } f(t) = h = sabit$$



Basamak fonksiyonu

olarak tanımlanan fonksiyon, basamak fonksiyon adını alır. h=1 olursa birim basamak fonksiyonu adını alır.

Basamak fonksiyonu; fiziksel anlamda bir eleman veya sisteme ani olarak sabit değere yükselen bir sinyal uygulanmasını ifade eder. Basamak fonksiyonun Laplace dönüşümü;

$$\mathcal{L}\{h\ u(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} h\,e^{-st}\,dt = -\frac{h}{s}\,e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{h}{s}$$

T kadar ötelenmiş birim basamak fonksiyonun Laplace dönüşümünü 9. özellikten faydalanarak yazacak olursak;

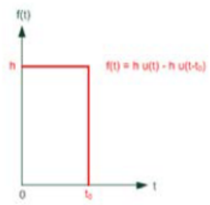
$$\mathcal{L}\{u(t-T)\} = \frac{e^{-sT}}{s}$$

Darbe Fonksiyon

Bir darbe fonksiyonu analitik olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$0 < t \leq t_0 \text{ için } f(t) = h = sabit$$

$$t < 0,\quad t > t_0 \text{ için } f(t) = 0$$



Darbe fonksiyonu

h=1 olursa birim darbe fonksiyonu adını alır.

Fiziksel olarak çok kısa bir süre için ($t=t_0$) ortaya çıkan ve sonra kaybolan bir sinyali (işareti) ifade eder.

Bir darbe fonksiyonu t=0 anında ortaya çıkan ve şiddeti (yüksekliği) h olan bir basamak fonksiyon ile $t=t_0$ anında başlayan ve şiddeti –h olan bir basamak fonksiyonun doğrusal toplamı (üst üste katlanması) olarak ele alınabilir. Yani;

$$f(t) = h\,u(t) - h\,u(t-t_0)$$

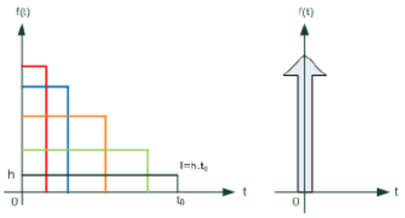
Buna göre daha önceki özelliklerden faydalanarak darbe fonksiyonunun Laplace dönüşümünü aşağıdaki gibi yazmak mümkündür.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{h\,u(t)\} - \mathcal{L}\{h\,u(t-t_0)\} = \frac{h}{s}\,(1 - e^{-t_0 s})$$

Ani Darbe (Impulse) Fonksiyonu

Dirac Delta fonksiyonu da denilen bu fonksiyon, darbe fonksiyonunun bir limiti olarak ele alınabilir. Yandaki şekilde görüldüğü gibi; darbe fonksiyonu h.t_0 alanı sabit kalmak koşuluyla darbenin devam süresi (t_0) küçültülürse h şiddeti sonsuza kadar artacaktır.

I=h.t_0 alanı sabit tutularak $t \to 0$ yapılırsa ani darbe fonksiyonu elde edilmiş olur.



Ani darbe fonksiyonu

I=1 durumu birim ani darbe fonksiyonu adını alır ve $\delta(t)$ ile gösterilir.

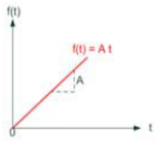
Buna göre ani darbe fonksiyonu $f(t) = I.\delta(t)$ 'nin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibi olur.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{I.\delta(t)\} = I$$

Eğer birim ani darbe fonksiyonu (I=1) söz konusuysa bu durumda aşağıdaki gibi olur.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{I.\delta(t)\} = 1$$

Rampa Fonksiyonu



Rampa fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A.t, & t \geq 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyona rampa fonksiyonu denir.

Fiziksel olarak zaman bağlı biçimde yavaş yavaş sürekli artan bir giriş işaretini ifade eder. Laplace dönüşümünü bulmak için kısmi integrasyon kuralı uygulanırsa;

$$F(s) = \mathcal{L}\{A.t)\} = \int_0^{\infty} A.t.\ e^{-st}\,dt$$

$\left.\begin{matrix} u = A.t \\ dv = e^{-st} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int_a^b u.dv = uv|_b^a - \int_a^b v.du$ yazılırsa;

$$F(s) = \mathcal{L}\{A.t)\} = \int_0^{\infty} A.t.\ e^{-st}\,dt = \left.\frac{-A.t.\ e^{-st}}{s}\right|_0^{\infty} - A\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-st}}{s}\right)dt = \left.\frac{-A.t.\ e^{-st}}{s}\right|_0^{\infty} - \left.\frac{A.\ e^{-st}}{s^2}\right|_0^{\infty}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{A.t)\} = \frac{A}{s^2}$$

Bunu genel kural olarak yazacak olursak;

$$\mathcal{L}\{t^n)\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$